BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

ASIE

2023

$f(x) = \ln(x) - x$

CORRECTION

1. a. Conjecturons le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$:

L'équation $\ln(x) = x$ ne semble pas avoir de solution, car les courbes représentatives des fonctions " $\ln(x)$ " et " x " ne se coupent pas.

1. b. Conjecturons le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = 0,2x$:

L'équation $\ln(x) = 0,2x$ semble avoir 2 de solutions, car les courbes représentatives des fonctions " $\ln(x)$ " et " $0,2x$ " se coupent en deux points distincts.

2. a. Calculons $f'(x)$:

Ici:
- $f(x) = \ln(x) - x$ (U - V)
- $\mathcal{D}f =]0; +\infty[$.

La fonction $f(x) = \ln(x) - x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$

(U' - V')

$$= \frac{1 - x}{x}.$$

Ainsi pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{1 - x}{x}.$

2. b. b1. Étudions le sens de variations de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$, sachant que $x > 0$.

1er cas : $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff 1 - x \leqslant 0$ cad $x \geqslant 1$ ou $x \in [\,1\,;+\infty\,[$.

2e cas : $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0$ cad $x \leqslant 1$ ou $x \in\,]\,0\,;1\,]$.

Ainsi :
- f est croissante sur $]\,0\,;1\,]$,
- f est décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

2. b. b2. Dressons le tableau de variations de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est :

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

• $b = f(1) = -1$ (maximum de f sur $]0;+\infty[$)

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. c. Déduisons-en le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$:

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $\ln(x) = x \iff \ln(x) - x = 0$ cad $f(x) = 0$.

Or le maximum de f sur $]0;+\infty[$ est: $f(1) = -1$.

Donc les valeurs de f sont toutes strictement négatives et par conséquent: l'équation $\ln(x) = x$ n'admet aucune solution.

3. a. Donnons en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$ le nombre de solutions de $g(x) = 0$:

Ici: • $g(x) = \ln(x) - kx$, avec $k > 0$

• $\mathcal{D}g =]0;+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$g(x)$	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$	$+\infty$

Avec: $g\left(\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{1}{k}\right) - k \times \left(\frac{1}{k}\right)$

$= - \ln(k) - 1.$

Nous allons distinguer trois cas.

Cas 1:

$g\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \iff -\ln(k) - 1 = 0 \iff \ln(k) = -1$ cad $k = e^{-1}.$

Dans ce cas, $g(x) = 0$ admet une unique solution: $x = \frac{1}{k}.$

Cas 2:

$g\left(\frac{1}{k}\right) < 0 \iff \ln(k) > -1$ cad $k > e^{-1}.$ $(k \in]e^{-1}; +\infty[)$

Dans ce cas, $g(x) = 0$ n'admet aucune solution (voir la question 2. c.).

Cas 3:

$g\left(\frac{1}{k}\right) > 0 \iff \ln(k) < -1$ cad $k < e^{-1}.$ $(k \in]0; e^{-1}[)$

Dans ce cas, $g(x) = 0$ admettra deux solutions:

- une solution dans $\left]0; \frac{1}{k}\right[$
- une solution dans $\left]\frac{1}{k}; +\infty\right[.$

3. b. Calculons $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k:

Comme vu à la question précédente: $g\left(\frac{1}{k}\right) = - \ln(k) - 1.$

3. c. Montrons que $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0 \iff \ln(k) < -1$:

Comme déjà vu: $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0 \iff -\ln(k) - 1 > 0$

$\iff -\ln(k) > 1.$

cad $\ln(k) < -1.$

3. d. Déterminons l'ensemble des valeurs de k telles que $g(x) = 0$ possède exactement deux solutions:

Comme déjà vu, l'ensemble demandé est: $k \in \left]0 ; e^{-1}\right[$.

3. e. Donnons selon les valeurs de k, le nombre de solutions de $g(x) = 0$:

DÉJÀ TRAITÉ PAGE 4 DE CE CORRIGÉ !!!