BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

2023

LE VOLUME DU TÉTRAÈDRE FMNP

CORRECTION

1. Donnons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$:

Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, M, N et P ont pour coordonnées:

$$M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right), N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right) \text{ et } P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right).$$

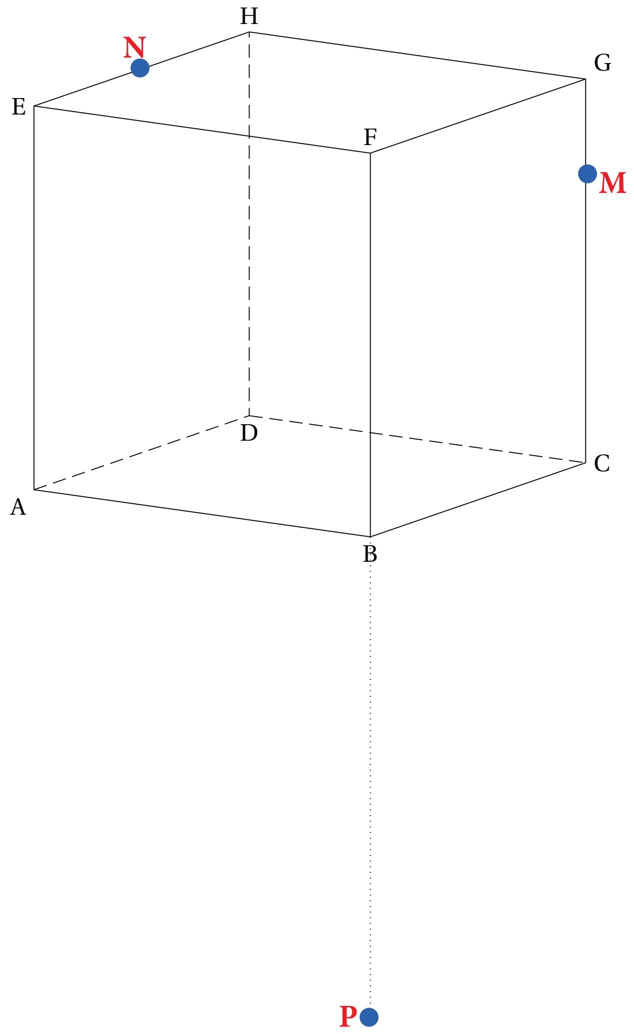
Dans ces conditions: • $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \\ z_N - z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ \frac{1}{2} - 1 \\ 1 - \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \\ z_P - z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 0 - 1 \\ -\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont donc: $\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Plaçons les points M, N et P sur la figure:

Après avoir placé les points M, N et P, nous avons le graphique suivant:



3. Justifions que les points M, N et P ne sont pas alignés:

D'après le cours, les points M, N et P ne sont pas alignés ssi **les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires**.

Or: • $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Et: $y_{\overrightarrow{MN}} = \frac{1}{2} \times y_{\overrightarrow{MP}}$ et $z_{\overrightarrow{MN}} \neq \frac{1}{2} \times z_{\overrightarrow{MP}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ n'étant pas colinéaires: les points M, N et P ne sont pas alignés.

Les points M, N et P définissent ainsi le plan (MNP).

4. a. a_1. Calculons $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$:

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = ((-1) \times 0) + \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1)\right) + \left(-\frac{1}{4} \times (-2)\right) = 0.$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = 0$: **les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont donc orthogonaux.**

4. a. a_2. Déduisons-en la nature du triangle MNP:

Comme $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux et non nuls: ils définissent un triangle rectangle en M.

Notons que ce triangle rectangle en M n'est pas isocèle.

4. b. Calculons l'aire du triangle MNP:

L'aire du triangle MNP est: $\mathcal{A} = \frac{MN \times MP}{2}$.

Or: • $MN = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$

• $MP = \sqrt{0 + 1 + 4} = \sqrt{5}$.

L'aire du triangle MNP est donc: $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{105}}{8}$.

5. a. Montrons que $\vec{n}\,(5\,;-8\,;4)$ est normal au plan (MNP):

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (MNP) ssi ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ du plan (MNP).

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{MN} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n}\,.\,\overrightarrow{MN} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{MP} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n}\,.\,\overrightarrow{MP} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{MN} = 5 \times (-1) + (-8) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times \frac{1}{4} = 0$

• $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{MP} = 5 \times 0 + (-8) \times (-1) + 4 \times (-2) = 0$.

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MN}$ et à $\overrightarrow{MP}$: le vecteur $\vec{n}$ est bien normal au plan (MNP).

5. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (MNP):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ s'écrit:

$$a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

• le point $M \in (MNP)$, avec $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_M) + b(y - y_M) + c(z - z_M) = 0$

$$\iff 5 \times (x - 1) - 8 \times (y - 1) + 4\left(z - \frac{3}{4}\right) = 0$$

cad $5x - 8y + 4z = 0$.

Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc: $5x - 8y + 4z = 0$.

6. **Déterminons une représentation paramétrique de la droite (d):**

La droite (d) est orthogonale au plan (MNP) et passe par le point $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • (d) passe par le point $F(1; 0; 1)$,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d) est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite **(d)** passant par le point **F** et de vecteur directeur $\vec{u}$ (5 ; -8 ; 4) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 5 \times t \\ y = 0 + (-8) \times t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 4 \times t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc:

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -8t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

7. **Montrons que les coordonnées du point L sont** $\left(\frac{4}{7} ; \frac{24}{35} ; \frac{23}{35} \right)$:

Le point **L** est le projeté orthogonal du point **F** sur le plan (**MNP**).

Le point **L** est donc le point d'intersection entre la droite **(d)** et le plan (**MNP**).

Les coordonnées du point **L** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_L = 1 + 5t \quad (1) \\ y_L = -8t \quad (2) \\ z_L = 1 + 4t \quad (3) \\ 5x_L - 8y_L + 4z_L = 0 \quad (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations **(1)**, **(2)** et **(3)**, nous pouvons écrire:

(4) $\iff 5x_L - 8y_L + 4z_L = 0 \iff 5 \times (1 + 5t) - 8 \times (-8t) + 4 \times (1 + 4t) = 0$

$$\iff 5 + 25t + 64t + 4 + 16t = 0$$

$$\iff 105t + 9 = 0$$

cad $t = -\frac{9}{105}$.

Les coordonnées du point L sont donc: • $x_L = 1 + 5 \times \left(-\frac{9}{105}\right) = \frac{4}{7}$

• $y_L = -8 \times \left(-\frac{9}{105}\right) = \frac{24}{35}$.

• $z_L = 1 + 4 \times \left(-\frac{9}{105}\right) = \frac{23}{35}$

8. a. Montrons que $FL = \frac{3\sqrt{105}}{35}$:

$$FL^2 = \left(\frac{4}{7} - 1\right)^2 + \left(\frac{24}{35} - 0\right)^2 + \left(\frac{23}{35} - 1\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{24}{35}\right)^2 + \left(\frac{12}{35}\right)^2$$

$$= \frac{1}{35^2} \times [\, 15^2 + 24^2 + 12^2 \,]$$

$$= \frac{945}{35^2}.$$

Ainsi: $FL = \sqrt{\frac{945}{35^2}}$ cad $FL = \frac{3\sqrt{105}}{35}$.

8. b. Calculons le volume du tétraèdre FMNP:

Notons que le tétraèdre FMNP a pour **hauteur [FL]** et pour base **le triangle rectangle MNP**.

Le volume du tétraèdre FMNP est donc:

$$\frac{(\text{ Aire base triangle MNP }) \times (\text{ Hauteur tétraèdre FMNP })}{3}$$

$$= \frac{(\text{ Aire base triangle MNP }) \times FL}{3}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{105}}{8} \times \frac{3\sqrt{105}}{35}}{3}$$

$$= \frac{105}{8 \times 35}$$

$$= \frac{3}{8}.$$

Le volume du tétraèdre FMNP est donc égal à: $\frac{3}{8}$.