

www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ
EXERCICE 3



ANTILLES-GUYANE
2023

LE RECTANGLE AH, HH_2

CORRECTION

1. a. Donnons les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}_1$ normal au plan P_1 :

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • une équation cartésienne du plan P_1 est: $2x + y - z + 2 = 0$

• $A(x_A; y_A; z_A)$

• $\vec{n}_1(a; b; c)$.

Dans ces conditions: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0.$$

Par identification avec l'équation cartésienne du plan P_1 , nous avons:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad -ax_A - by_A - cz_A = 2$$

Ainsi, $\vec{n}_1$ a pour coordonnées: $a = 2, b = 1, c = -1$.

1. b. Montrons que les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires:

Nous savons que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.

Ici: • $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P_1 ,

• $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P_2 .

Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux ssi: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Or: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2 \times 1) + (1 \times -1) + (-1 \times 1) = 0$.

Donc: les plans P_1 et P_2 sont bien perpendiculaires.

2. a. Déterminons une équation cartésienne du plan P_2 :

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal au plan P_2 est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• le point $B(1; 1; 2) \in P_2$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \times (x - 1) + (-1) \times (y - 1) + 1 \times (z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - y + 1 + z - 2 = 0$$

$$\text{cad } x - y + z - 2 = 0.$$

Une équation cartésienne du plan P_2 est donc: $x - y + z - 2 = 0$.

2. b. Montrons que la droite Δ est l'intersection des plans P_1 et P_2 :

Une représentation paramétrique de la droite Δ est:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

La droite Δ est l'intersection des plans P_1 et P_2 ssi:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 & (1) \\ x - y + z - 2 = 0 & (2) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 & (1) + (2) \\ x - y + z - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z - 2 \end{cases}$$

$$\text{cad} \begin{cases} x = 0 \\ y = t - 2, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

Nous retrouvons ainsi la représentation paramétrique de la droite Δ de l'énoncé, et donc: la droite Δ est bien l'intersection des plans P_1 et P_2 .

3. a. Montrons que pour tout réel t , $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$:

D'après l'énoncé: • $A(1; 1; 1)$

• $M_t(0; -2 + t; t), t \in \mathbb{R}$.

Dans ces conditions:

$$\begin{aligned} AM_t^2 &= (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2 \\ &= (0 - 1)^2 + (-2 + t - 1)^2 + (t - 1)^2 \\ &= 1 + (t - 3)^2 + (t - 1)^2 \\ &= 1 + (t^2 + 9 - 6t) + (t^2 + 1 - 2t) \\ &= 2t^2 - 8t + 11. \end{aligned}$$

Au total, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

3. b. Déduisons-en que $AH = \sqrt{3}$:

D'après l'énoncé: • $A(1; 1; 1)$

• $H =$ projeté orthogonal de A sur Δ .

Étape 1: détermination des coordonnées du point H .

Comme le point H est le projeté orthogonal de A sur Δ ses coordonnées

sont telles que:
$$\begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = -2 + t \\ z_H = t \end{cases}, \text{ avec } t \text{ tel que } AM_t \text{ minimum.}$$

AM_t est minimum quand $\sqrt{2t^2 - 8t + 11}$ est minimum cad quand:

$$2t^2 - 8t + 11 \text{ est minimum.}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(t) = 2t^2 - 8t + 11$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et nous pouvons ainsi calculer la dérivée f' pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f'(t) = 4t - 8$.

$$f'(t) = 0 \text{ quand } 4t - 8 = 0 \text{ cad quand } t = 2.$$

Donc AM_t est minimum quand $t = 2$.

Les coordonnées de H sont donc: $x_H = 0, y_H = 0$ et $z_H = 2$.

Étape 2: calcul effectif de AH.

$$\begin{aligned} AH^2 &= (x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2 \\ &= (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (2 - 1)^2 \\ &= (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons bien: $AH = \sqrt{3}$.

4. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite D_1 :

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite D_1 passe par le point $A(1; 1; 1)$

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D_1 est: $\vec{u} = \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite D_1 passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{n}_1(2; 1; -1)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + (-1)t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite D_1 est donc:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. b. Dédouons-en que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$:

Nous savons que H_1 est le projeté orthogonal du point A sur le plan P_1 ,

Le point H_1 est donc le point d'intersection entre la droite D_1 et le plan P_1 ,

Les coordonnées du point H_1 vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = 1 + t & (2) \\ z = 1 - t & (3) \\ 2x + y - z + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \Leftrightarrow 2x + y - z + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(1 + 2t) + (1 + t) - (1 - t) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4t + 1 + t - 1 + t + 2 = 0$$

$$\text{cad } t = -\frac{2}{3}.$$

Les coordonnées du point H_1 sont donc: • $x_{H_1} = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

• $y_{H_1} = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$

• $z_{H_1} = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$

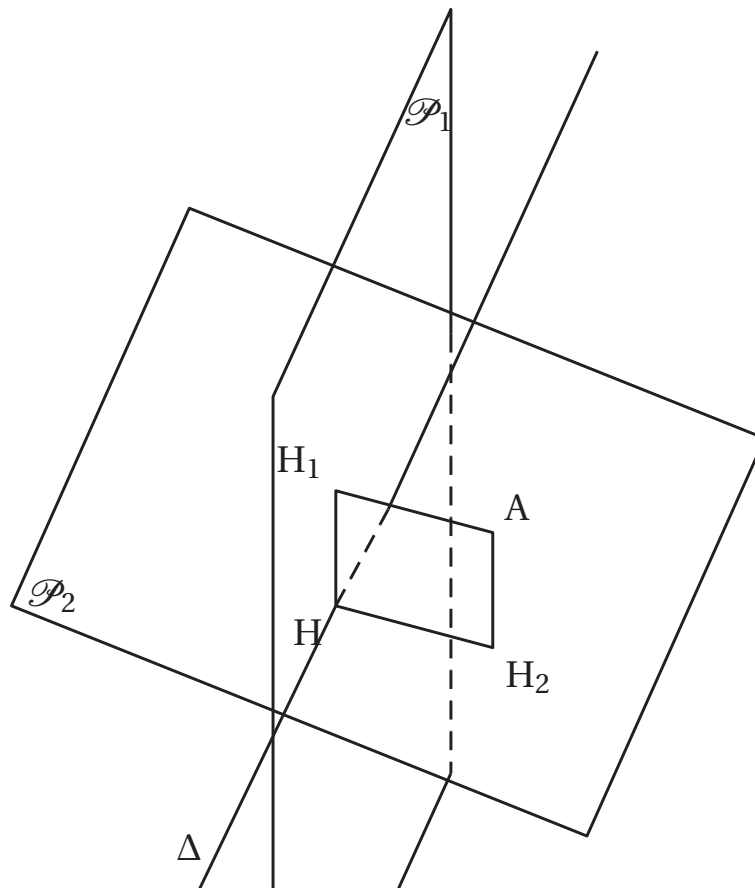
5. Montrons que AH_1H_2 est un rectangle:

Nous savons que: • $A(1; 1; 1)$

• $H(0; 0; 2)$

• $H_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$

• $H_2\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.



Dans ces conditions: • $\overrightarrow{AH_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$\bullet \overrightarrow{H_2H} \begin{pmatrix} 0 - \frac{4}{3} \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 2 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Et donc: $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{H_2H}$.

Le quadrilatère AH_1HH_2 est donc un parallélogramme.

La droite (AH_1) est orthogonale au plan P , et H_1 appartient à ce plan; donc (AH_1) est perpendiculaire à toutes les droites de P , passant par H_1 , en particulier la droite (HH_1) .

Le parallélogramme AH_1HH_2 possède un angle droit: **c'est donc bien un rectangle !!!**