www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

ANTILLES-GUYANE
2023

FOIRE AUX QUESTIONS

CORRECTION

PARTIE A

1. Calculons U_1 et U_2 et interprétons:

Ici: • $U_{n+1} = 0,9\,U_n + 1,3$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

• $U_1 = 3$. (300 questions posées)

Dans ces conditions: • $U_2 = 0,9 \times U_1 + 1,3 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4$

• $U_3 = 0,9 \times U_2 + 1,3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9$.

Ainsi: $U_2 = 4$, $U_3 = 4,9$.

Cela signifie que: • on peut estimer à 400 le nombre de questions le second mois

• on peut estimer à 490 le nombre de questions le troisième mois.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times (0,9)^n$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel non nul n: $U_n = 13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^n$ ".

Initialisation: $U_1 = 3$, d'après l'énoncé.

Et: $U_1 = 13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^1$

$= 13 - \frac{100}{9} \times 0,9$

$= 13 - 10$

$= 3$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel non nul n,

$U_n = 13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^n$ et montrons qu'alors nous avons

$$U_{n+1} = 13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^{n+1}.$$

Supposons: $U_n = 13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^n$, pour un entier naturel n non nul fixé.
(1)

D'où: (1) $\Rightarrow 0,9 \times U_n = 0,9 \times \left(13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^n\right)$

$\Rightarrow 0,9 \times U_n = 11,7 - \frac{100}{9} \times (0,9)^{n+1}$

$\Rightarrow 0,9 \times U_n + 1,3 = 13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^{n+1}$

$\Rightarrow U_{n+1} = 13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^{n+1}$.

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^n$.

3. Déduisons-en que la suite (U_n) est croissante:

Pour cela, nous devons déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = \left[13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^{n+1} \right] - \left[13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^n \right]$$

$$= \left(\frac{100}{9} \times (0,9)^n \right) \times (1 - 0,9)$$

$$= 0,1 \times \left(\frac{100}{9} \times (0,9)^n \right) > 0.$$

Ainsi, $U_{n+1} - U_n > 0$ et par conséquent: la suite (U_n) est strictement croissante.

4. Déterminons la valeur renvoyée et interprétons:

Le programme écrit en langage Python renvoie la plus petite valeur " **n** " telle que $U_n > p$.

Ainsi, la plus petite valeur " **n** " renvoyée par la saisie de **seuil (8.5)** est telle que: $U_n > 8,5$.

$$U_n > 8,5 \iff 13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^n > 8,5$$

$$\iff (0,9)^n < 0,405$$

$$\iff n \times \ln(0,9) < \ln(0,405)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,405)}{\ln(0,9)}, \text{ car } 0,9 \in]0;1[$$

cad $n > 8,578$ ou $n \geq 9$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

La valeur renvoyée par la saisie de seuil (8.5) est donc: $n = 9$.

PARTIE B

1. Précisons les valeurs de V_1 et V_2:

Ici: $V_n = 9 - 6 \times e^{-0,19 \times (n-1)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans ces conditions: • $V_1 = 9 - 6 \times e^{-0,19 \times 0} = 3$

• $V_2 = 9 - 6 \times e^{-0,19 \times 1} \approx 4,04$.

Ainsi: $V_1 = 3$, $V_2 \approx 4,04$.

2. Déterminons la plus petite valeur de n telle que $V_n > 8,5$:

Pour répondre à cette question, résolvons l'inéquation: $V_n > 8,5$.

$V_n > 8,5 \iff 9 - 6 \times e^{-0,19(n-1)} > 8,5$

$\iff e^{-0,19(n-1)} < \dfrac{1}{12}$

$\iff -0,19(n-1) < -\ln(12)$

$\iff n > \dfrac{\ln(12) + 0,19}{0,19}$

cad $n > 14,078$ ou $n \geq 15$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Ainsi, la plus petite valeur de n telle que $V_n > 8,5$ est : $n = 15$.

PARTIE C

1. Laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?

Il y a plus de 850 questions sur la FAQ quand $U_n > 8,5$.

Or cela arrive : • le 9e mois avec le modèle 1

• le 15e mois avec le modèle 2.

Ainsi, parmi les deux modélisations, on choisira le modèle 1.

2. Pour quelle modélisation, y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la limite de U_n et V_n en $+\infty$.

• $$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^n$$

$$= 13 \quad \text{car} \quad 0,9 \in]0 ; 1[.$$

• $$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} 9 - 6 \times e^{-0,19(n-1)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} 9 - \frac{6}{e^{0,19(n-1)}}$$

$$= 9 \text{ car } \lim_{n \to +\infty} \frac{6}{e^{0,19(n-1)}} = 0 \text{ (TCC)}.$$

Ainsi, nous aurons le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme, dans le cas du modèle 1 car $13 > 9$.