BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

2023

LE VOLUME DU TÉTRAÈDRE DEFG

CORRECTION

1. a. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$:

Dans le repère orthonormé d'unité 1 cm, les coordonnées des points E, F, G sont: $E\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$.

Dans ces conditions:

- $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}x_F - x_E\\y_F - y_E\\z_F - z_E\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-3\\2-(-2)\\1-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}x_G - x_F\\y_G - y_F\\z_G - z_F\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-(-1)\\2-2\\-3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont donc:

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}.$$

1. b. Justifions que les points E, F et G ne sont pas alignés:

Nous savons que: $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Or: $x_{\overrightarrow{EF}} = (-1) \times x_{\overrightarrow{FG}}$ et $y_{\overrightarrow{EF}} \neq (-1)\, y_{\overrightarrow{FG}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires**.

$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ n'étant pas colinéaires: les points E, F et G ne sont pas alignés.

Les points E, F et G définissent ainsi le plan (EFG).

2. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (FG):

D'après le cours, nous savons que:

- **Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.**
- **Soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) un vecteur non nul de l'espace.**
- **La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:**

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = z_A + t.c \end{cases}$$

Ici: • la droite (FG) passe par le point F (- 1 ; 2 ; 1)

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (FG) est: $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (FG) passant par le point F et de vecteur directeur $\overrightarrow{FG}$ (4 ; 0 ; - 4) s'écrit:

$$\begin{cases} x = -1 + 4 \times t \\ y = 2 + 0 \times t \\ z = 1 + (-4) \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (FG) est donc:

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 \\ z = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. b. Vérifions que H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG):

Ici, le point H a pour coordonnées (2 ; 2 ; -2).

Le point H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG) ssi:

- H ∈ (FG)
- $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux.

• H ∈ (FG) si le système: $\begin{cases} x_H = -1 + 4t \\ y_H = 2 \\ z_H = 1 - 4t \end{cases}$ est possible.

$$\begin{cases} x_H = -1 + 4t \\ y_H = 2 \\ z_H = 1 - 4t \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = -1 + 4t \\ 2 = 2 \\ -2 = 1 - 4t \end{cases} \quad \text{cad } t = \frac{3}{4}.$$

Donc le système est possible et par conséquent: $H \in (FG)$.

- $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux ssi: $\overrightarrow{EH} . \overrightarrow{FG} = 0$.

Or: $$\overrightarrow{EH} . \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} x_H - x_E \\ y_H - y_E \\ z_H - z_E \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= ((-1) \times 4) + (4 \times 0) + ((-1) \times (-4))$$

$$= 0.$$

Comme $\overrightarrow{EH} . \overrightarrow{FG} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux.

Au total: H est bien le projeté orthogonal de E sur (FG).

2. c. Montrons que l'aire du triangle EFG est égale à 12 cm²:

L'aire du triangle EFG est égale à: $\mathcal{A} = \dfrac{EH \times FG}{2}$.

En effet, [EH] est la hauteur du triangle EFG correspondant à la base [FG].

Or: • $EH = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{18}$

• $FG = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$.

Dans ces conditions: $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{18} \times \sqrt{32}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 12$.

L'aire du triangle EFG est donc bien égale à: 12 cm².

3. a. Montrons que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFG):

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (EFG) ssi ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ du plan (EFG).

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{EF} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{FG} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{FG} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = (2 \times (-4)) + (1 \times 4) + (2 \times 2) = 0$

• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{FG} = (2 \times 4) + (1 \times 0) + (2 \times (-4)) = 0$.

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{EF}$ et à $\overrightarrow{FG}$: le vecteur $\vec{n}$ est bien normal au plan (EFG).

3. b. Déterminons une équation cartésienne du plan (EFG):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

• le point F ∈ (EFG), avec $F = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_F) + b(y - y_F) + c(z - z_F) = 0$

$\iff 2 \times (x - (-1)) + 1 \times (y - 2) + 2 \times (z - 1) = 0$

cad $2x + y + 2z - 2 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (EFG) est donc: $2x + y + 2z - 2 = 0$.

3. c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (d):

La droite **(d)** passe par le point **D (3; 1; 5)** et est orthogonale au plan **(EFG)**.

D'après le cours, nous savons que:

• Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.

• Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.

• La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite **(d)** passe par le point **D (3; 1; 5)**,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite **(d)** est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite **(d)** passant par le point **D** et de vecteur directeur $\vec{n}$ **(2 ; -1 ; 2)** s'écrit:

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \times t \\ y = 1 + 1 \times t \\ z = 5 + 2 \times t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

3. d. Calculons les coordonnées du point K:

K correspond au projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG).

Le point K est donc le point d'intersection entre la droite (d) et le plan (EFG).

Les coordonnées du point K vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_K = 3 + 2t \quad (1) \\ y_K = 1 + t \quad (2) \\ z_K = 5 + 2t \quad (3) \\ 2x_K + y_K + 2z_K - 2 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations **(1)**, **(2)** et **(3)**, nous pouvons écrire:

$(4) \iff 2x_K + y_K + 2z_K - 2 = 0$

$\iff 2(3+2t) + (1+t) + 2(5+2t) - 2 = 0$

$\iff 9t + 15 = 0$

cad $t = -\dfrac{5}{3}$.

Les coordonnées du point K sont donc:

- $x_K = 3 + 2 \times \left(-\dfrac{5}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}$
- $y_K = 1 + \left(-\dfrac{5}{3}\right) = -\dfrac{2}{3}$.
- $z_K = 5 + 2 \times \left(-\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{5}{3}$

4. a. Vérifions que la distance DK est égale à 5 cm:

Nous savons que: $D\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{5}{3} \end{pmatrix}$.

D'où: $DK = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{3} - 3\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{5}{3} - 5\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{10}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{10}{3}\right)^2}$

$= \dfrac{15}{3}$

$= 5$ cm.

La distance DK est donc bien égale à : 5 cm.

4. b. Déduisons-en le volume du tétraèdre DEFG :

Le tétraèdre DEFG a pour **hauteur [DK]** et pour **base le triangle EFG**.

Le volume du tétraèdre DEFG est donc :

$$\frac{\text{(Aire base triangle EFG) x (Hauteur tétraèdre DEFG)}}{3}$$

$$= \frac{\text{(Aire base triangle EFG) x DK}}{3}$$

$$= \frac{12 \times 5}{3}$$

$$= 20.$$

Le volume du tétraèdre DEFG est donc égal à : 20