www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

AMÉRIQUE DU NORD
2023

3000 SPORTIFS

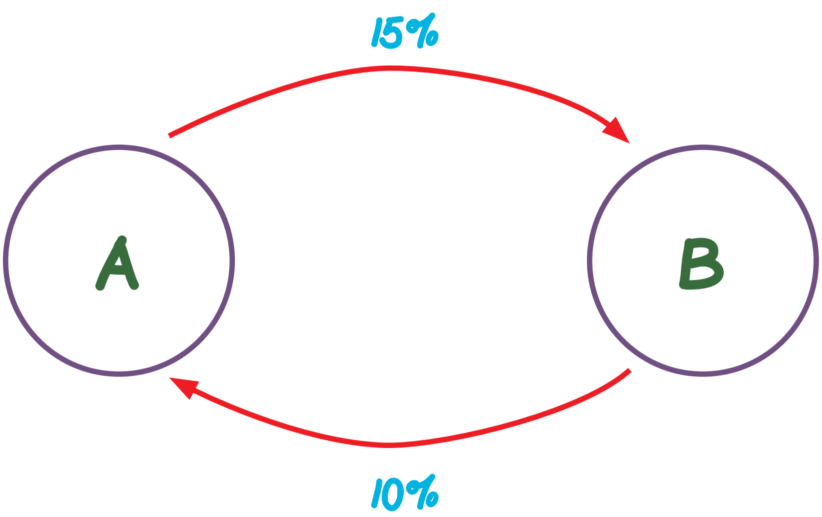
CORRECTION

1. Calculons les nombres de membres de chaque club en 2024:

D'après l'énoncé:

- groupe de 3000 sportifs
- club A = athlétisme
- club B = basketball
- 2023 = rang " 0 "
- nombre de membres en 2023 dans **club A = 1700 =** a_0
- nombre de membres en 2023 dans **club B = 1300 =** b_0.

Et:



Ici, nous devons donc calculer a_1 et b_1.

- $a_1 = 1700 - (15\% \times 1700) + (10\% \times 1300) =$ **1575 membres**

- $b_1 = 1300 - (10\% \times 1300) + (15\% \times 1700) =$ **1425 membres.**

Ainsi, nous avons: $a_1 = 1575$ et $b_1 = 1425$.

2. Déterminons une relation entre a_n et b_n:

Pour tout entier naturel n, nous avons: $a_n + b_n = 3000$ cad $b_n = 3000 - a_n$.

3. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,75\, a_n + 300$:

Pour tout entier naturel n: $a_{n+1} = 0,85 \times a_n + 0,1 \times b_n$

$\Longleftrightarrow \quad a_{n+1} = 0,85 \times a_n + 0,1\,(3000 - a_n)$

$\Longleftrightarrow \quad a_{n+1} = 0,85 \times a_n + 300 - 0,1 \times a_n$

cad $a_{n+1} = 0,75\, a_n + 300$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $a_{n+1} = 0,75\, a_n + 300$.

4. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$:

Ici: • $a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$

• $a_{n+1} = 0,75\, a_n + 300$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

"pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$".

Initialisation: $a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$.

Et: $1200 \leqslant 1575 \leqslant 1700 \leqslant 1700$ **cad** $1200 \leqslant a_1 \leqslant a_0 \leqslant 1700$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$ et montrons qu'alors nous avons

$$1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1700.$$

Supposons: $\underbrace{1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

D'où: $(1) \Rightarrow 0,75 \times 1200 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} \leqslant 0,75 \times a_n \leqslant 0,75 \times 1700$

$\Rightarrow 0,75 \times 1200 + 300 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} + 300 \leqslant 0,75 \times a_n + 300$

$\leqslant 0,75 \times 1700 + 300$

$\Rightarrow 1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1575 \leqslant 1700.$

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$.

4. b. Déduisons-en que la suite (a_n) converge:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700 \iff \begin{cases} a_{n+1} \leqslant a_n \\ a_n \geqslant 1200 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_n) \text{ est décroissante} \\ (a_n) \text{ est minorée par } m = 1200 \end{cases}$$

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (a_n) est convergente.

5. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique:

$V_n = a_n - 1200 \iff V_{n+1} = a_{n+1} - 1200$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\iff V_{n+1} = (0,75\,a_n + 300) - 1200. \quad (1)$

Or: $V_0 = a_0 - 1200$ cad $V_0 = 1700 - 1200 = 500$ et $a_n = V_n + 1200$.

D'où: $(1) \iff V_{n+1} = (0,75\,[\,V_n + 1200\,] + 300) - 1200$

$\iff V_{n+1} = 0,75 \times V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent: (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $V_0 = 500$.

5. b. Exprimons V_n en fonction de n:

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} = 0,75 \times V_n$.

Dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = (0,75)^n \times V_0 \quad \text{cad} \quad V_n = 500 \times (0,75)^n.$$

5. c. Déduisons-en a_n pour tout entier naturel n:

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = V_n + 1200$.

Dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 500 \times (0,75)^n + 1200$.

6. a. Déterminons la limite de la suite (a_n):

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 500 \times (0,75)^n + 1200$$

$$= 1200 \text{ car } \lim_{n \to +\infty} (0,75)^n = 0, \text{ car } 0,75 \in]0;1[.$$

D'où: $\lim_{n \to +\infty} a_n = 1200.$

6. b. Interprétons ce résultat:

Cela signifie qu'à long terme cad quand " n " très grand: le club A comptera 1200 membres et le club B comptera 1800 membres.

7. a. Recopions et complétons le programme Python:

Le programme Python qui renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1280 est le suivant:

```
def  seuil() :
     n = 0
     A = 1 700
     while A>=1280 :
         n=n+1
         A = 0.75*A + 300
     return
```

7. b. Déterminons la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil:

Pour répondre à cette question, nous devons résoudre l'inéquation: $a_n < 1280$.

$a_n < 1280 \iff 500 \times (0,75)^n + 1200 < 1280$

$$\iff (0,75)^n < \frac{8}{50}$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \times \ln(0,75) < \ln\left(\frac{8}{50}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad n > \frac{\ln\left(\frac{8}{50}\right)}{\ln(0,75)}, \quad \text{car} \quad 0,75 \in]\,0\,;1\,[$$

car $n > 6,37$ cad $n \geqslant 7$ car $n \in \mathbb{N}$.

La valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil est donc: $n = 7$.