BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

AMÉRIQUE DU NORD
2023

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{11}{U_n}\right)$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Donnons U_1 et U_2 :

Ici : • $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{11}{U_n}\right)$

• $U_0 = 5$.

Dans ces conditions : • $U_1 = \frac{1}{2}\left(U_0 + \frac{11}{U_0}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{11}{5}\right) = \frac{18}{5}$

• $U_2 = \frac{1}{2}\left(U_1 + \frac{11}{U_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{11}{\frac{18}{5}}\right) = \frac{599}{180}$.

Ainsi : $U_1 = \frac{18}{5}$, $U_2 = \frac{599}{180}$.

2. Montrons que f est croissante sur $[\sqrt{11}\,; +\infty[$:

Ici : • $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2x}$ $\left(U + \frac{11}{V}\right)$

• $\mathcal{D}f = [\sqrt{11}\,; +\infty[$.

• **Calculons f':**

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{11}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc sur $[\sqrt{11}\,; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\sqrt{11}\,; +\infty[$.

Pour tout $x \in [\sqrt{11}\,; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{11}{2x^2}$ $\left(U' - \dfrac{11 \times V'}{V^2}\right)$

$$= \frac{x^2 - 11}{2x^2}.$$

• **Étudions le signe de f' sur $[\sqrt{11}\,; +\infty[$, sachant que $2x^2 > 0$:**

Sur $[\sqrt{11}\,; +\infty[$: $x^2 - 11 \geq 0$ car $x^2 \geq 11$.

Ainsi, sur $[\sqrt{11}\,; +\infty[$: la fonction f est croissante.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq U_{n+1} \geq \sqrt{11}$:

Ici: • $U_{n+1} = f(U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• f est croissante sur $[\sqrt{11}\,; +\infty[$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \geq U_{n+1} \geq \sqrt{11}$ ".

Initialisation: $U_0 = 5$ et $U_1 = \dfrac{18}{5} \approx 3,6$.

Et: $U_0 \geqslant U_1 \geqslant \sqrt{11}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $U_n \geqslant U_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$ et montrons qu'alors $U_{n+1} \geqslant U_{n+2} \geqslant \sqrt{11}$.

Supposons: $U_n \geqslant U_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'où: $(1) \Rightarrow f(U_n) \geqslant f(U_{n+1}) \geqslant f(\sqrt{11})$ (f croissante)

$$\Rightarrow f(U_n) \geqslant f(U_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \frac{11}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geqslant U_{n+2} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{11+11}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geqslant U_{n+2} \geqslant \frac{11}{\sqrt{11}} \geqslant \sqrt{11}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geqslant U_{n+2} \geqslant \sqrt{11}.$$

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geqslant U_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

4. Déduisons-en que la suite (U_n) converge vers une limite " a ":

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$U_n \geqslant U_{n+1} \geqslant \sqrt{11} \iff \begin{cases} U_n \geqslant U_{n+1} \\ U_n \geqslant \sqrt{11} \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est décroissante} \\ (U_n) \text{ est minorée par } m = \sqrt{11} \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente et converge vers " a ".

5. Déterminons la valeur exacte de " a ":

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite a telle que:

$$f(a) = a.$$

$$f(a) = a \iff \frac{1}{2}\left(a + \frac{11}{a}\right) = a$$

$$\iff a + \frac{11}{a} = 2a$$

$$\iff a^2 + 11 = 2a^2$$

$$\iff a^2 - 11 = 0$$

$$\text{cad} \begin{cases} a = \sqrt{11} & \text{à retenir} \\ \text{ou} \\ a = -\sqrt{11} & \text{à rejeter} \end{cases}.$$

Ainsi: la suite (U_n) converge vers $a = \sqrt{11}$.

PARTIE B

1. a. Expliquons why $\ell_0 = 2,2$:

D'après l'énoncé l'aire du rectangle R_0 est égale à: $\mathcal{A} = 11$.

Or, d'après le cours: $\mathcal{A}$ = longueur x largeur.

Comme $L_0 = 5$: $\ell_0 = \frac{\mathcal{A}}{L_0} = \frac{11}{5}$ cad $\ell_0 = 2,2$.

Ainsi, nous avons bien: $\ell_0 = 2,2$.

1. b. Établissons que pour tout entier naturel n, $\ell_n = \frac{11}{L_n}$:

Comme dit à la question précédente, l'aire du rectangle R_n est constante et égale à: $\mathcal{A} = 11$.

Or, d'une manière générale: $\mathcal{A}$ = longueur x largeur = $L_n \times \ell_n$.

Nous avons donc: $11 = L_n \times \ell_n$ cad $\ell_n = \frac{11}{L_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n: $\ell_n = \frac{11}{L_n}$.

2. Vérifions que la suite (L_n) correspond bien à la suite (U_n):

Ici: • $L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $\ell_n = \frac{11}{L_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $L_0 = 5$.

Dans ces conditions: $L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2} \iff L_{n+1} = \frac{L_n + \frac{11}{L_n}}{2}$

$$\iff L_{n+1} = \frac{1}{2}\left(L_n + \frac{11}{L_n}\right).$$

D'où, la suite (L_n) correspond bien à la suite (U_n) avec:

$$L_{n+1} = \frac{1}{2}\left(L_n + \frac{11}{L_n}\right) \text{ et } L_0 = 5.$$

3. Montrons que pour tout entier naturel n, $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$:

Comme nous sommes en présence d'un rectangle: $L_n \geqslant \ell_n$.

Distinguons deux cas, sachant que $L_n \times \ell_n = 11$:

- $L_n \geqslant \ell_n \iff \dfrac{11}{\ell_n} \geqslant \ell_n \iff 11 \geqslant \ell_n^2$ cad $\ell_n \leqslant \sqrt{11}$.
- $L_n \geqslant \ell_n \iff L_n \geqslant \dfrac{11}{L_n} \iff L_n^2 \geqslant 11$ cad $L_n \geqslant \sqrt{11}$.

Par conséquent pour tout entier naturel n, nous avons bien:

$$\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n.$$

4. Interprétons ce résultat géométriquement:

Ici, les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$.

Les deux suites convergent vers le même réel $\sqrt{11}$: le rectangle R_n tend donc vers un carré de côté $\sqrt{11}$. (Longueur = Largeur)

5. a. Qu'obtient-il comme valeur de sortie pour ℓ et L ?

Si l'utilisateur tape *heron(3)* dans une console d'exécution Python, il obtient comme valeurs de sortie: $P_3 = 3,316\,606$ et $L_3 = 3,316\,643$.

5. b. Donnons une interprétation de ces deux valeurs:

Une interprétation de ces deux valeurs est que: " le nombre $\sqrt{11}$ est compris entre 3, 316 606 et 3, 316 643, soit un encadrement d'une amplitude inférieure à 4×10^{-5} avec seulement trois itérations de notre algorithme ".

Excellente précision !