BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

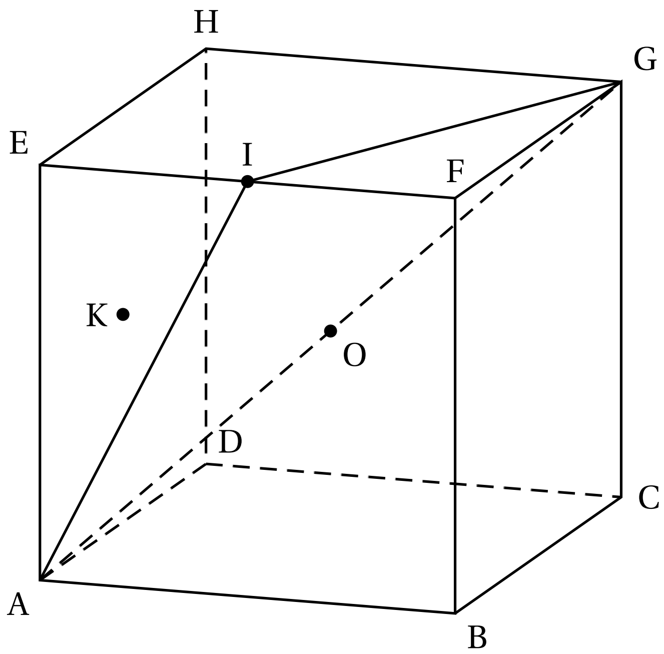
POLYNÉSIE
2022

LE TÉTRAÈDRE ABIG

CORRECTION

PARTIE 1

1. Donnons les coordonnées des points A, B et G:



Dans le repère (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$), les coordonnées des points A, B et G sont:

- A (0; 0; 0)

- $B(1;0;0)$
- $G(1;1;1)$ car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Ainsi, les coordonnées des points A, B et G sont:

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \text{ et } G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

2. Montrons que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG):

Nous avons: $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et $K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

De plus:

- $\overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix}0-1\\ \frac{1}{2}-0\\ \frac{1}{2}-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}-0\\ 0-0\\ 1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix}1-0\\ 1-0\\ 1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

Notons que: $x_{\overrightarrow{AI}} = \frac{1}{2} \times x_{\overrightarrow{AG}}$ et $y_{\overrightarrow{AI}} \neq \frac{1}{2} \times y_{\overrightarrow{AG}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

Les points A, I et G ne sont donc pas alignés et définissent le plan (AIG).

Dans ces conditions, la droite (BK) est orthogonale au plan **(AIG)** ssi le vecteur $\overrightarrow{BK}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ du plan **(AIG)**.

Or, nous avons:
- $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AI} = \left((-1) \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \times 0 \right) + \left(\frac{1}{2} \times 1 \right) = 0$
- $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AG} = ((-1) \times 1) + \left(\frac{1}{2} \times 1 \right) + \left(\frac{1}{2} \times 1 \right) = 0.$

Comme $\overrightarrow{BK}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AI}$ et à $\overrightarrow{AG}$: le vecteur $\overrightarrow{BK}$ est normal au plan (AIG).

Et donc: la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).

3. Déterminons une équation cartésienne du plan (AIG):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A ($x_A ; y_A ; z_A$) et un vecteur normal $\vec{n}$ ($a ; b ; c$) s'écrit:

$$a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0.$$

Or ici:
- un vecteur normal est $\overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- le point A ∈ **(AIG)**, avec $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (-1) \times (x - 0) + \frac{1}{2} \times (y - 0) + \frac{1}{2} \times (z - 0) = 0$$

cad $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0.$

Une équation cartésienne du plan (CFI) est donc:

$-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$ ou $2x - y - z = 0.$

4. Donnons une représentation paramétrique de la droite (BK):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = z_A + t.c \end{cases}$$

Ici:
- la droite (BK) passe par le point $B(1; 0; 0)$,
- un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (BK) est: $\vec{u} = \overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

D'où une représentation paramétrique de la droite (BK) passant par le point B et de vecteur directeur $\overrightarrow{BK}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + (-1) \times t \\ y = 0 + \frac{1}{2} \times t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 + \frac{1}{2} \times t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite (BK) est donc:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{2} t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = \frac{1}{2} t \end{cases}$$

5. **Déterminons les coordonnées du point L:**

Le point **L** est le projeté orthogonal de B sur le plan **(AIG)**.

Les coordonnées du point **L** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_L = 1 - t & (1) \\ y_L = \frac{1}{2} t & (2) \\ z_L = \frac{1}{2} t & (3) \\ 2x_L - y_L - z_L = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff 2x_L - y_L - z_L = 0 \iff 2 \times (1-t) - \left(\frac{1}{2}t\right) - \left(\frac{1}{2}t\right) = 0$$

$$\iff -3t + 2 = 0$$

$$\text{cad } t = \frac{2}{3}.$$

Les coordonnées du point L sont donc: • $x_L = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

• $y_L = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

• $z_L = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

6. Calculons la distance du point B au plan (AIG):

La distance du point B au plan **(AIG)** correspond à **BL**.

Or: $$BL = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

La distance du point B au plan (AIG) est donc égale à: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

PARTIE 2

1. a. Justifions que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB:

Dans le **tétraèdre ABIG**, si on considère **AIB** comme base, alors cette base est incluse dans le plan **(AIB)**.

Or le plan **(AIB)** contient la face avant du cube cad **la face ABFE**.

Et donc l'arête **[GF]** est bien perpendiculaire à ce plan, puisque ABCDEFGH est un cube.

Donc: [GF] est bien la hauteur relative à la base AIB.

1. b. Déduisons-en le volume du tétraèdre ABIG:

Le tétraèdre **ABIG** a pour **hauteur [GF]** et **pour base le triangle isocèle AIB**.

Nous savons que le volume du tétraèdre ABIG est donné par:

$$V_{ABIG} = \frac{(\text{ Aire base triangle isocèle AIB }) \times (\text{ Hauteur tétraèdre ABIG })}{3}.$$

Or: • **Aire base du triangle isocèle AIB**

$$= \frac{\text{base du triangle isocèle} \times \text{hauteur du triangle isocèle}}{2}$$

$$= \frac{AB \times 1}{2}$$

$$= \frac{1 \times 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

• Hauteur du tétraèdre ABIG = GF = $\sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2} = 1.$

D'où: $V_{ABIG} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1$ cad $V_{ABIG} = \frac{1}{6}.$

Le volume du tétraèdre ABIG est donc égal à: $\frac{1}{6}$ unité de volume.

2. Montrons que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$:

Notons que: $AI = IG = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $AG = \sqrt{3}.$

Or: Aire du triangle isocèle AIG = $\frac{\text{base du triangle x hauteur du triangle}}{2}.$

L'aire du triangle isocèle AIG est donc égale à:

$$\mathcal{A}(AIG) = \frac{AG \times OI}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}}{2} \qquad \left(O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

L'aire du triangle isocèle AIG est ainsi bien égale à : $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. Déduisons-en la distance du point B au plan (AIG):

Soit " ℓ " la distance séparant le point B au plan **(AIG)**.

Nous avons: $V_{ABIG} = \frac{(\text{ Aire base triangle isocèle } \mathbf{AIG}) \times \ell}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\mathcal{A}(\mathrm{AIG}) \times \ell}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \times 3 = \frac{\sqrt{6}}{4} \times \ell$$

cad $\ell = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

La distance du point B au plan (AIG) est donc égale à : $\ell = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.