www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

POLYNÉSIE

2022

LE CASQUE AUDIO

CORRECTION

PARTIE 1

1. Calculons $P(C \cap D)$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- C = " le casque est contrefait ".
- $\overline{C}$ = " le casque n'est pas contrefait ".
- D = " le casque présente un défaut ".
- $\overline{D}$ = " le casque ne présente pas de défaut ".

- $P(C) = 20\%$
- $P(\overline{C}) = 1 - 20\% = 80\%$.

- $P(D) = ?$
- $P(\overline{D}) = ?$

- $P_C(D) = 10\%$

- $P_C(\overline{D}) = 1 - 10\% = 90\%.$

- $P_{\overline{C}}(D) = 2\%$

- $P_{\overline{C}}(\overline{D}) = 1 - 2\% = 98\%.$

Ici, nous devons calculer **P (C ∩ D)**.

$\mathbf{P(C \cap D)} = P_C(D) \times P(C)$

$= 10\% \times 20\%$

$= 2\%.$

Ainsi la probabilité que le casque soit contrefait et qu'il présente un défaut est de: 2%.

2. Démontrons que P (D) = 0, 036:

Ici, il s'agit de calculer: **P (D)**.

L'événement $D = (D \cap C) \cup (D \cap \overline{C})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$\mathbf{P(D)} = P(D \cap C) + P(D \cap \overline{C})$

$= P(C \cap D) + P_{\overline{C}}(D) \times P(\overline{C})$

$= 2\% + 2\% \times 80\%$

$= 3,6\%.$

Ainsi, la probabilité que le casque choisi au hasard présente un défaut est de: 3, 6% cad 0, 036.

3. Le casque a un défaut, la probabilité qu'il soit contrefait ?

Déterminer la probabilité que le casque soit contrefait, sachant qu'il présente un défaut, revient à calculer: $P_D(C)$.

$$P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{2\%}{3,6\%}$$

$$\approx 55,6\%.$$

Sachant que le casque présente un défaut, la probabilité qu'il soit contrefait est environ égale à: 55, 6%.

PARTIE 2

1. a. Justifions que X suit une loi binomiale B (35 ; 0, 036):

Soit l'expérience aléatoire consistant à **commander 35 casques portant le logo de cette marque**: on assimile cette expérience à un tirage avec remise.

Soient les événements D = " le casque présente un défaut ", et $\overline{D}$ = " le casque ne présente pas de défaut ".

On désigne par **X** la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 35 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: D et $\overline{D}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de D suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 35$ et $p = 0,036$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\,(35\,;\,0,036)$.

1. b. Calculons la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement 1 casque présentant un défaut:

Il s'agit de calculer ici: $P\,(X = 1)$, avec $X \rightsquigarrow B\,(35\,;\,0,036)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P\,(X = k) = \binom{n}{k} p^k \,.\, (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P\,(X = 1) = \binom{35}{1} (0,036)^1\,(1 - 0,036)^{34}$

$\approx 0,362$ (calculatrice).

Au total, la probabilité qu'il y ait parmi les caques commandés, exactement 1 casque présentant un défaut est d'environ: 36,2 %.

1. c. Calculons $P\,(X \leqslant 1)$:

Il s'agit de calculer ici: **$P(X \leqslant 1)$**, avec $X \rightsquigarrow B(35\,;\,0,036)$.

$$P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \binom{35}{0}(0,036)^0(1 - 0,036)^{35} + 0,362$$

$$= (1 - 0,036)^{35} + 0,362$$

$$\approx 0,639 \quad (\text{calculatrice}).$$

Ainsi: $P(X \leqslant 1) \approx 63,9\%$.

2. Déterminons le nombre minimal de casques à commander pour que soit vérifiée l'inéquation $P(X \geqslant 1) > 0,99$:

Répondre à cette question revient à déterminer l'entier naturel " n " tel que:

$$P(X \geqslant 1) > 0,99, \text{ avec } X \rightsquigarrow B(n\,;\,0,036).$$

$$P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - P(X = 0) > 0,99$$

$$\iff 1 - \binom{n}{0}(0,036)^0(1 - 0,036)^n > 0,99$$

$$\iff (1 - 0,036)^n < 0,01$$

$$\iff n \ln(0,964) < \ln(0,01)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \quad \text{cad} \quad n \geqslant 126 \text{ casques}.$$

Ainsi, le nombre minimum de casques est égal a: 126.