BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

POLYNÉSIE
2022

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{(1 + U_n)}$$

CORRECTION

1. a. Calculons U_1, U_2 et U_3:

Ici:
- $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1 + U_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $U_0 = 1$.

Dans ces conditions:
- $U_1 = \dfrac{U_0}{1 + U_0} = \dfrac{1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$
- $U_2 = \dfrac{U_1}{1 + U_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$
- $U_3 = \dfrac{U_2}{1 + U_2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{4}$.

Ainsi: $U_1 = \dfrac{1}{2}$, $U_2 = \dfrac{1}{3}$, $U_3 = \dfrac{1}{4}$.

1. b. Complétons les lignes " 3 " et " 6 " du script Python:

Le script Python complété est le suivant:

```
def liste(k) :
    L = []
    u = 1
    for i in range(0, k+1) :
        L.append(u)
        u = u/(1+u)
    return(L)
```

2. Déterminons le sens de variation de la suite (U_n):

Pour cela, nous devons déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

Or: $$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{1 + U_n} - U_n$$

$$= \frac{U_n - U_n(1 + U_n)}{1 + U_n}$$

$$= \frac{-U_n^2}{1 + U_n} < 0$$ car: $U_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\frac{-U_n^2}{1 + U_n} < 0$ et par conséquent $U_{n+1} - U_n < 0$, nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est strictement décroissante.

3. Déduisons-en que la suite (U_n) converge:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$\begin{cases} U_n > U_{n+1} \\ U_n > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est strictement décroissante} \\ (U_n) \text{ est minorée par } m = 0. \end{cases}$$

Or d'après le cours, toute suite strictement décroissante et minorée est **convergente**.

Donc ici: **la suite (U_n) converge bien.**

4. Déterminons la valeur de sa limite:

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet pour limite ℓ telle que:

$$\ell = \frac{\ell}{1+\ell}.$$

$$\ell = \frac{\ell}{1+\ell} \iff \ell^2 + \ell = \ell$$

$$\iff \ell^2 = 0 \text{ cad } \ell = 0.$$

Au total, (U_n) converge vers ℓ avec: $\ell = 0$.

5. a. Conjecturons une expression de U_n en fonction de n:

Au vu des premiers termes $\left(U_0 = 1,\ U_1 = \frac{1}{2},\ U_2 = \frac{1}{3},\ U_3 = \frac{1}{4} \right)$, nous pouvons conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = \frac{1}{1+n}$.

En effet:

- $U_0 = \frac{1}{1+0}$
- $U_1 = \frac{1}{1+1}$
- $U_2 = \frac{1}{1+2}$

- $U_3 = \frac{1}{1+3}$.

5. b. **Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{1+n}$:**

Ici: • $U_n = \frac{1}{1+n}$, **pour tout $n \in \mathbb{N}$**

• $U_0 = 1$, $U_1 = \frac{1}{2}$, $U_2 = \frac{1}{3}$ et $U_3 = \frac{1}{4}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n = \frac{1}{1+n}$ ".

Initialisation: $U_0 = 1$ et $1 = \frac{1}{1+0}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $U_n = \frac{1}{1+n}$

et montrons qu'alors $U_{n+1} = \frac{1}{1+(n+1)}$.

Supposons: $U_n = \frac{1}{1+n}$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

D'où: (1) $\Rightarrow \frac{U_n}{1+U_n} = \frac{\frac{1}{1+n}}{1+\left(\frac{1}{1+n}\right)}$

$\Rightarrow \frac{U_n}{1+U_n} = \frac{1}{(1+n)+1}$

$\Rightarrow \frac{U_n}{1+U_n} = \frac{1}{1+(n+1)}$

$$\Rightarrow \quad U_{n+1} = \frac{1}{1+(n+1)}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $U_n = \dfrac{1}{1+n}$.