www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

POLYNÉSIE
2022

7% D'INFECTÉS

CORRECTION

1. Calculons $P(M \cap T)$

D'après l'énoncé, nous avons:

- M = " la personne est malade ".
- $\overline{M}$ = " la personne n'est pas malade ".
- T = " le test est positif ".
- $\overline{T}$ = " le test est négatif ".

- $P(M) = 7\%$
- $P(\overline{M}) = 1 - 7\% = 93\%$.

- $P(T) = ?$
- $P(\overline{T}) = ?$

- $P_M(T) = 1 - 20\% = 80\%$
- $P_M(\overline{T}) = 20\%$.

- $P_{\overline{M}}(T) = 1\%$
- $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1 - 1\% = 99\%$.

Ici, nous devons calculer: **$P(M \cap T)$**.

$$P(M \cap T) = P_M(T) \times P(M)$$

$$= 80\% \times 7\%$$

$$= 0,056.$$

Ainsi la probabilité que la personne soit malade et que son test soit positif est égale à: 0,056 cad 5,6%.

2. **Montrons que $P(T) = 0,0653$:**

Ici, il s'agit de calculer: **$P(T)$**.

L'événement $T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M})$$

$$= P(M \cap T) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})$$

$$= 5,6\% + 1\% \times 93\%$$

$$= 0,0653.$$

Ainsi, la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif est bien égale à: 0,0653 cad 6,53%.

3. Est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?

Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$ cad la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

4. Déterminons la probabilité que la personne soit malade sachant que le test est positif:

Cela revient à calculer: $P_T(M)$ cad la valeur prédictive du test.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{5,6\%}{6,53\%}$$

$$\approx 85,76\%.$$

Sachant que le test est positif, la probabilité que la personne choisie au hasard soit malade est d'environ: 85,76% ou 86% à 10^{-2} près.

5. a. Précisons la nature des paramètres de la loi suivie par X:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **choisir 10 personnes au hasard dans la population**: on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise car la taille de la population est très grande.

Soient les évènements **T** = " le test est positif ", et $\overline{T}$ = " le test est négatif ".

On désigne par **X** la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 10 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: T et $\overline{T}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de T suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 10$ et $p = 0,0653$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(10; 0,0653)$.

5. b. Déterminons la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif:

Il s'agit de calculer ici: $P(X = 2)$, avec $X \rightsquigarrow B(10; 0,0653)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X = 2) = \binom{10}{2} (0,0653)^2 (1 - 0,0653)^8$

$$\approx 0,11 \quad (\text{calculatrice}).$$

Au total, la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif est d'environ: 11%.

6. Déterminons le nombre minimum de personnes à tester pour que soit

vérifiée l'inéquation $P(X \geq 1) > 99\%$:

Répondre à cette question revient à déterminer l'entier naturel " n " tel que:

$$P(X \geq 1) > 0{,}99, \text{ avec } X \rightsquigarrow B(n\,;\,0{,}0653).$$

$$P(X \geq 1) > 0{,}99 \iff 1 - P(X = 0) > 0{,}99$$

$$\iff 1 - \binom{n}{0}(0{,}0653)^0(1 - 0{,}0653)^n > 0{,}99$$

$$\iff (0{,}9347)^n < 0{,}01$$

$$\iff n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9347)} \quad \text{cad} \quad n \geq 69 \text{ personnes.}$$

Ainsi, le nombre minimum de personnes est égal à: 69.