BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

NOUVELLE CALÉDONIE
2022

MAISON & RÉSEAU ÉLECTRIQUE

CORRECTION

1. Donnons les coordonnées du point G:

D'après l'énoncé:
- $A\,(0\,;0\,;0)$
- $B\,(3\,;0\,;0)$ car $\vec{i} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$
- $D\,(0\,;2\,;0)$ car $\vec{j} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AD}$
- $E\,(0\,;0\,;1)$ car $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.

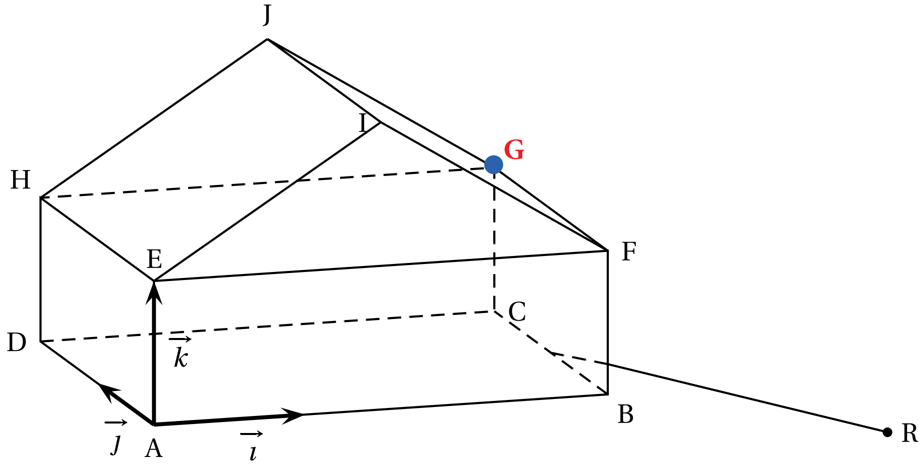
Dans ces conditions: $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG}$ (Chasles)

$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

$= (0\,;0\,;1) + (0\,;2\,;0) + (3\,;0\,;0)$

$= (3\,;2\,;1)$.

Nous avons le graphique suivant:



Ainsi les coordonnées du point G sont: $(3 ; 2 ; 1)$.

2. Déterminons une équation cartésienne du plan (EHI):

Le vecteur $\vec{n}\ (2 ; 0 ; -3)$ est un vecteur normal au plan (EHI).

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A $(x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}\ (a ; b ; c)$ s'écrit:

$$a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

• le point $E \in$ (EHI), avec $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a (x - x_E) + b (y - y_E) + c (z - z_E) = 0$

$\Longleftrightarrow\ 2 \times (x - 0) + 0 \times (y - 0) - 3 \times (z - 1) = 0$

cad $2x - 3z + 3 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (EHI) est donc: $2x - 3z + 3 = 0$.

3. Déterminons les coordonnées du point I:

Le triangle (EIF) est isocèle en I.

Dans ces conditions, le projeté orthogonal de I sur [EF] est le milieu de [EF].

Or: E (0; 0; 1) et F (3; 0; 1).

Les coordonnées du point L, projeté orthogonal de I sur [EF] sont donc:

$$L = \begin{pmatrix} \dfrac{0+3}{2} \\ \dfrac{0+0}{2} \\ \dfrac{1+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A partir du point L, pour obtenir le point I , faut rajouter $1 \times \vec{k}$.

D'où les coordonnées du point I sont: $\left(\dfrac{3}{2} ; 0 ; 2 \right)$.

4. Déterminons une mesure de l'angle $\widehat{EIF}$:

Nous avons: $\overrightarrow{EI} = \begin{pmatrix} x_I - x_E \\ y_I - y_E \\ z_I - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF} = \begin{pmatrix} x_F - x_I \\ y_F - y_I \\ z_F - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Et: • $EI = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

• $IF = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

L'angle $\widehat{EIF}$ noté α est tel que: $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{IF}}{EI \cdot IF}$ (cours)

$$\iff \cos(\alpha) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right) + (1 \times (-1))}{\frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2}}$$

cad $\cos(\alpha) = \frac{5}{13}$.

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $\widehat{EIF} = \alpha \approx 112{,}6°$.

5. a. Donnons une représentation paramétrique de la droite Δ:

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = z_A + t.c \end{cases}$$

Ici: • la droite Δ passe par le point $R\,(6\,;-3\,;-1)$

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point R et de vecteur directeur $\vec{n} = (-3\,;\,4\,;\,1)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 6 + (-3) \times t \\ y = -3 + 4 \times t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + 1 \times t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc:

$$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -3 + 4t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + t \end{cases}$$

5. b. Déterminons les coordonnées du point K:

Le point K est le point d'intersection de la droite Δ avec **le plan (BFG) d'équation** $x = 3$.

Les coordonnées du point K vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_K = 6 - 3t & \textbf{(1)} \\ y_K = -3 + 4t & \textbf{(2)} \\ z_K = -1 + t & \textbf{(3)} \\ x_K = 3 & \textbf{(4)} \end{cases}.$$

A l'aide des équations **(1)**, **(2)** et **(3)**, nous pouvons écrire:

$$\textbf{(4)} \iff x_K = 3 \iff 6 - 3t = 3$$

$$\iff 3t = 3$$

cad $t = 1$.

Les coordonnées du point K sont donc:
- $x_K = 6 - 3 \times 1 = 3$
- $y_K = -3 + 4 \times 1 = 1$.
- $z_K = -1 + 1 = 0$

5. c. Le point K appartient-il à l'arête [BC] ?

Nous avons: B (3 ; 0 ; 0) et C (3 ; 2 ; 0).

Or nous remarquons que:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ \dfrac{y_B + y_C}{2} \\ \dfrac{z_B + z_C}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3+3}{2} \\ \dfrac{0+2}{2} \\ \dfrac{0+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{pmatrix}.$$

Donc le point K est le milieu du segment [BC] et par conséquent le point K appartient bien à l'arête [BC].