BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

NOUVELLE CALÉDONIE

2022

$f(x) = x^2 - 6x + 4\ \ln(x)$

CORRECTION

1. a. Déterminons la limite de f en 0^+ et interprétons:

Ici: • $f(x) = x^2 - 6x + 4\ \ln(x)$ $\quad (U + 4\ \ln(V))$

• $\mathcal{D}f =]\,0\,;+\infty\,[$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 - 6x + 4\ \ln(x).$$

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 - 6x = 0$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} 4\ \ln(x) = -\infty$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 + (-\infty) = -\infty$.

Cela signifie que la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation: $x = 0$.

1. b. Déterminons la limite de f en $+\infty$:

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = x^2 \left[1 - \dfrac{6}{x} + 4\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} \right) \right]$. $\quad (x \neq 0)$

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left[1 - \frac{6}{x} + 4\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)\right]$.

Or d'après le cours:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{6}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (Croissances Comparées).

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \times [\, 1 + 0 + 4 \times 0 \,] = +\infty$.

2. a. Déterminons $f'(x)$ pour tout $x \in \,]\,0\,; +\infty\,[$:

D'après l'énoncé, la fonction f est dérivable sur $]\,0\,; +\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \,]\,0\,; +\infty\,[$.

Pour tout $x \in \,]\,0\,; +\infty\,[$: $f'(x) = 2x - 6 + 4 \times \left(\frac{1}{x}\right)$ $\left(U' + 4 \times \left(\frac{V'}{V}\right)\right)$

$$= 2x - 6 + \frac{4}{x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \,]\,0\,; +\infty\,[$: $f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x}$.

2. b. b1. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $]\,0\,; +\infty\,[$:

$f'(x) = 0 \iff 2x - 6 + \frac{4}{x} = 0$

$$<=> \ 2x^2 - 6x + 4 = 0 \quad (x \neq 0).$$

Soit l'équation: $2x^2 - 6x + 4 = 0.$ $\quad (ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-6)^2 - 4\,(2 \times 4) = 4 > 0.$

Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, **l'équation admet deux solutions distinctes:**

- $x_1 = \dfrac{6 - 2}{4} = 1 \in \,]\,0\,;+\infty\,[$
- $x_2 = \dfrac{6 + 2}{4} = 2 \in \,]\,0\,;+\infty\,[.$

Distinguons deux cas pour tout $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[.$

1er cas: $f'(x) \leqslant 0.$

$f'(x) \leqslant 0 \iff 2x^2 - 6x + 4 \leqslant 0$ **cad ssi** $x \in [\,1\,;2\,].$

2e cas: $f'(x) \geqslant 0.$

$f'(x) \geqslant 0 \iff 2x^2 - 6x + 4 \geqslant 0$ **cad ssi** $x \in \,]\,0\,;1\,] \cup [\,2\,;+\infty\,[.$

Ainsi:
- f **est décroissante sur** $[\,1\,;2\,]$,
- f **est croissante sur** $]\,0\,;1\,] \cup [\,2\,;+\infty\,[.$

2. b. b2. Déduisons-en le tableau de variations de f :

Le tableau de variations de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est:

x	0		1		2		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	‖ a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c	$\nearrow$	d

Avec : • $a = -\infty$

• $b = f(1) = -5$

• $c = f(2) = -8 + 4\ln(2)$

• $d = +\infty$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[4 ; 5]$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici : • f est continue sur $]0 ; +\infty[$, donc sur $[4 ; 5]$

• " $k = 0$ " est compris entre : $f(4) = -8 + 4\ln(4) < 0$

et : $f(5) = -5 + 4\ln(5) > 0$

• f est strictement croissante sur $[4 ; 5]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[4; 5]$.

4. a. a1. Étudions la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$:

D'après le cours:
- f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$
- f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Or ici, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f''(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2}$.

Pour répondre à la question, nous allons étudier le signe de f'' sur $]0; +\infty[$, sachant que $x^2 > 0$.

Donc le signe de f'' dépend du signe de $2x^2 - 4$:

- $2x^2 - 4 \leqslant 0 \iff x^2 \leqslant 2$ cad ssi $x \in]0; \sqrt{2}]$,
- $2x^2 - 4 \geqslant 0 \iff x^2 \geqslant 2$ cad ssi $x \in [\sqrt{2}; +\infty[$.

Ainsi:
- f est concave sur $]0; \sqrt{2}]$,
- f est convexe sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

4. a. a2. Précisons les valeurs des coordonnées des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$:

D'après le cours, si f'' s'annule et change de signe en a alors $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = a$.

Ici, la fonction f'' s'annule et change de signe en: $x = \sqrt{2}$.

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion: le point A d'abscisse $x = \sqrt{2}$ et d'ordonnée $y = f(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 2\ln(2)$.

4. b. Indiquons selon la valeur de " t ", les positions relatives du segment AM et de la courbe $\mathcal{C}_f$:

Ici: • $A(\sqrt{2}\,;\,2-6\sqrt{2}+2\ln(2))$

• $M(t\,;\,f(t))$ avec $t \in \mathbb{R}-\{\sqrt{2}\}$.

D'après la question 4. a., nous pouvons donc affirmer que:

- si $t \in]\,0\,;\sqrt{2}\,[$, le segment AM est une corde de la courbe d'une fonction concave et donc [AM] est en-dessous de $\mathcal{C}_f$,

- si $t \in]\,\sqrt{2}\,;+\infty\,[$, le segment AM est une corde de la courbe d'une fonction convexe et donc [AM] est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.