BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

FRANCE MÉTROPOLITAINE 2022

LE COYOTE SAUVAGE

CORRECTION

PARTIE A

1. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- M = " le coyote est malade. "
- $\overline{M}$ = " le coyote n'est pas malade. "
- T = " le test du coyote est positif. "
- $\overline{T}$ = " le test du coyote est négatif. "

- $P(M) = 70\%$
- $P(\overline{M}) = 1 - 70\% = 30\%$.

- $P(T) = ?$
- $P(\overline{T}) = ?$

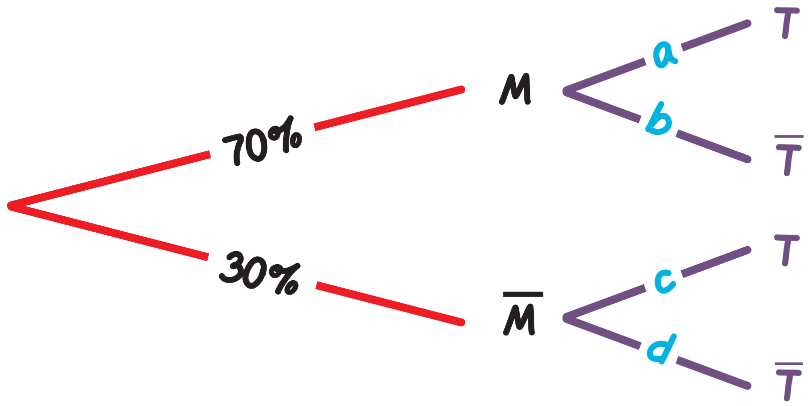
- $P_M(T) = 97\%$

- $P_M(\overline{T}) = 1 - 97\% = 3\%$.

- $P_{\overline{M}}(T) = 1 - 95\% = 5\%$

- $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 95\%$.

D'où l'arbre de probabilités complété est le suivant:



, avec:
- $a = 97\%$
- $b = 3\%$
- $c = 5\%$
- $d = 95\%$

.

2. Déterminons la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif:

Ici, nous devons calculer : $P(M \cap T)$.

$$P(M \cap T) = P_M(T) \times P(M)$$

$$= 97\% \times 70\%$$

$$= 0,679.$$

Ainsi la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif est donc égale à: 0, 679 cad 67, 9%.

3. Montrons que $P(T) = 0,694$:

Ici, il s'agit de calculer: **$P(T)$**.

L'événement $T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M})$$

$$= P(M \cap T) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})$$

$$= 0,679 + 5\% \times 30\%$$

$$= 0,694.$$

Ainsi la probabilité que le test du coyote soit positif est donc bien égale à: **0,694** **cad** **69,4%**.

4. Calculons la valeur prédictive positive du test:

La valeur prédictive positive du test correspond à la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

Calculer la valeur prédictive positive du test revient donc à calculer:

$$P_T(M).$$

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,679}{0,694}$$

$$= 0,978.$$

La valeur prédictive positive du test est donc de: 97, 8%.

5. a. a_1. Proposons une définition de la " valeur prédictive négative du test ":

La valeur prédictive négative du test correspond à: la probabilité que le coyote ne soit effectivement pas malade sachant que son test est négatif.

5. a. a_2. Calculons la valeur prédictive négative du test:

Calculer la valeur prédictive négative du test revient donc à calculer:

$$P_{\overline{T}}(\overline{M}).$$

$$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{M} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})}$$

$$= \frac{P(\overline{M} \cap \overline{T})}{1 - P(T)}$$

$$= \frac{P_{\overline{M}}(\overline{T}) \times P(\overline{M})}{1 - P(T)}$$

$$= \frac{95\% \times 30\%}{1 - 0,694}$$

$$= 0,931.$$

La valeur prédictive négative du test est donc de: 93, 10%.

5. b. Comparons les deux valeurs prédictives du test et interprétons:

Comme la valeur prédictive positive du test est supérieure à la valeur prédictive négative du test: cela signifie qu'un résultat positif est bien plus probable qu'un résultat négatif.

PARTIE B

1. a. Déterminons la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **capturer au hasard cinq coyotes**: on assimile ce choix à un tirage avec remise.

Soient les événements T = " le test est positif ", et $\overline{T}$ = " le test est négatif ".

On désigne par X la variable aléatoire qui a un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes ayant un test positif.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 5 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: T et $\overline{T}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de T suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 5$ et $p = 0,694$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\,(5\,;\,0,694)$.

1. b. Calculons la probabilité que dans cet échantillon, un seul coyote ait un test positif:

Il s'agit de calculer ici: $P(X=1)$, avec $X \rightsquigarrow B(5; 0,694)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X=1) = \binom{5}{1} (0,694)^1 (1-0,694)^4$

$\approx 0,03$ (calculatrice).

Au total, la probabilité qu'un seul coyote (dans cet échantillon) ait un test positif est d'environ: 3%.

1. c. L'affirmation du vétérinaire est-elle vraie ?

Pour répondre à cette question, nous devons calculer: $P(X \geqslant 4)$.

Or: $P(X \geqslant 4) = P(X=4) + P(X=5)$

$= \binom{5}{4} (0,694)^4 (1-0,694)^1 + \binom{5}{5} (0,694)^5 \times 1$

$= 0,3549 + 0,1609$

$\approx 0,5158$ (calculatrice).

Comme $0,5158 > 0,5$: OUI, le vétérinaire a raison.

2. Combien de coyotes sachant que $X \rightsquigarrow B(n; 0,694)$?

Répondre à cette question revient à déterminer l'entier naturel " n " tel que:

$$P(X \geq 1) > 0,99.$$

$P(X \geq 1) > 0,99 \iff 1 - P(X = 0) > 0,99$

$\iff 1 - \binom{n}{0}(0,694)^0 \times (1 - 0,694)^n > 0,99$

$\iff 1 - (0,306)^n > 0,99$

$\iff (0,306)^n < 0,01$

$\iff n \times \ln(0,306) < \ln(0,01)$ cad $n \geq 4$ coyotes.

Ainsi, les vétérinaires doivent capturer au moins 4 coyotes pour qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif supérieur à 99%.