BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2022

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES C D C A D C

1. $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$ admet pour asymptote la droite d'équation...

Ici: • $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

D'après le cours: Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \ell$.

Donc, pour répondre à cette question, nous allons calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = \dfrac{x^2\left(-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}$ $(x \neq 0)$

$$= \frac{-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}.$$

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$.

Or: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{-2 + 0 + 0}{1 + 0} = -2$.

Donc ici la courbe représentative de f admet pour asymptote la droite d'équation: $y = -2$.

2. La primitive F de f sur IR qui vérifie F $(0) = 1$ est...

Ici: • $f(x) = xe^{x^2}$

• $\mathcal{D}f = IR$.

• f est définie et continue sur IR.

Elle admet donc une primitive sur IR cad une fonction F dérivable sur IR telle que: $F' = f$.

Une primitive de f sur IR est: $F(x) = \dfrac{1}{2} e^{x^2}$.

En effet pour tout $x \in IR$, nous avons bien:

$$F'(x) = \frac{1}{2}(2x \times e^{x^2})$$

$$= xe^{x^2}$$

$$= f(x).$$

• D'après le cours, **toutes les primitives de f sur IR sont de la forme**:

$$G(x) = F(x) + c, \; c \in IR.$$

Ici, nous avons donc: $G(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + c, \; c \in IR.$

Or: $G(0) = 1.$

$G(0) = 1 \iff \frac{1}{2} e^0 + c = 1$

$\iff \frac{1}{2} + c = 1$ **cad** $c = \frac{1}{2}.$

Au total, la primitive F de f sur IR demandée est: $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}.$

3. **On peut affirmer que la fonction f est . . .**

Nous sommes en présence de la représentation graphique de la courbe de la dérivée f' de f sur IR.

Au vu du graphique, nous pouvons dire que:

- **f' est croissante sur $]-\infty ; 3]$, donc sur $[0 ; 2]$,**
- **f' est décroissante sur $[3 ; +\infty[$.**

D'après le cours: **f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$, pour tout $x \in I$.**

Or ici, f' est croissante sur $[\,0\,;2\,]$ ce qui revient à dire que:

$$\text{sur } [\,0\,;2\,],\ f''(x) \geqslant 0.$$

Au total, nous pouvons affirmer que: la fonction f est convexe sur $[\,0\,;2\,]$.

4. Les primitives de la fonction f définie sur IR par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$ sont...

Les primitives de f sur IR ont donc pour dérivées: $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$.

Ainsi pour connaître le sens de variations des primitives de f, nous devons étudier le signe de f sur IR.

Or pour tout $x \in$ IR: $e^{-x^2} > 0$ et donc $f(x) > 0$.

Au total, les primitives de f sur IR sont: toutes croissantes sur IR.

5. La limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{3x^2 + 1}$ définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est...

Ici: • $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{3x^2 + 1}$

• $\mathcal{D}f = \,]\,0\,;+\infty\,[$.

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = \dfrac{2}{3} \times \left[\dfrac{x^2 \times \dfrac{\ln(x)}{x^2}}{x^2 \times \left(1 + \dfrac{1}{3x^2}\right)} \right]$ $(x \neq 0)$

$$= \frac{2}{3} \times \left[\frac{\dfrac{\ln(x)}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{3x^2}} \right].$$

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{3} \times \left[\frac{\frac{\ln(x)}{x^2}}{1 + \frac{1}{3x^2}} \right]$.

Or : • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (Croissances Comparées)

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3x^2} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{3} \times \left[\frac{0}{1+0} \right] = 0$.

Ainsi la limite en $+\infty$ de la fonction f est égale à: 0.

6. L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans IR...

Nous devons résoudre l'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ (1) dans IR.

Procédons à un changement de variable en posant: $X = e^x$.

Dans ces conditions: (1) <=> $X^2 + X - 12 = 0$. ($aX^2 + bX + c = 0$)

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (1)^2 - 4 \times 1 \times (-12)$

$= 49 > 0$.

Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, l'équation (1) admet deux solutions distinctes:

$$\bullet\ X_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$$

$$\bullet\ X_2 = \frac{-1+7}{2} = 3.$$

Or: $X_1 = -4 \iff e^{x_1} = -4$ ce qui est impossible car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Nous retiendrons donc que la solution: $X = 3$ cad $x = \ln(3)$.

Au total, l'équation (1) admet dans $\mathbb{R}$: une seule solution, $x = \ln(3)$.