www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2022

LE TÉTRAÈDRE ABCH

CORRECTION

1. a. Donnons les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D:

D'après l'énoncé:
- A (-1; 1; 3) dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)
- une représentation paramétrique de la droite D est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ (a; b; c) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = z_A + t.c \end{cases}$$

Donc ici: • la droite D passe par le point A (1 ; 2 ; 2)

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de D est: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D sont: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. b. Montrons que B (-1 ; 3 ; 0) ∈ D:

Le point B (-1 ; 3 ; 0) ∈ D ssi il existe un réel " t " tel que:

$$\begin{cases} x_B = 1 + 2t \\ y_B = 2 - t \\ z_B = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 3 = 2 - t \\ 0 = 2 + 2t \end{cases}.$$

$$\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 3 = 2 - t \\ 0 = 2 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = -2 \\ -t = 1 \\ 2t = -2 \end{cases} \quad \text{cad} \quad \{ t = -1.$$

Comme il existe bien un réel t (t = -1): B ∈ D.

1. c. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$:

• Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées: $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - (-1) \\ 3 - 1 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

• $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions: $\overrightarrow{AB} . \vec{u} = (0 \times 2) + (2 \times (-1)) + ((-3) \times 2) = -8$.

Ainsi: $\overrightarrow{AB} . \vec{u} = -8$.

2. a. **Montrons que le plan $\mathcal{P}$ admet par équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$:**

Le plan $\mathcal{P}$ passe par le point $A(-1; 1; 3)$ et est orthogonal à la droite D.

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

• le point $A \in \mathcal{P}$, avec $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\Longleftrightarrow 2 \times (x - (-1)) - 1 \times (y - 1) + 2 \times (z - 3) = 0$

$\Longleftrightarrow 2x + 2 - y + 1 + 2z - 6 = 0$

cad $2x - y + 2z - 3 = 0$.

Une représentation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc bien:

$$2x - y + 2z - 3 = 0.$$

2. b. Déduisons-en les coordonnées du point H:

Le point H est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite D.

Les coordonnées du point H vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_H = 1 + 2t & (1) \\ y_H = 2 - t & (2) \\ z_H = 2 + 2t & (3) \\ 2x_H - y_H + 2z_H - 3 = 0 & (4) \end{cases}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$(4) \iff 2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0$

$\iff 2 + 4t - 2 + t + 4 + 4t - 3 = 0$

$\iff 9t + 1 = 0$

cad $t = -\frac{1}{9}.$

Les coordonnées du point H sont donc:

- $x_H = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9}$
- $y_H = 2 - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{19}{9}$.
- $z_H = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9}$

2. c. Calculons la valeur exacte de la longueur AH:

$$AH^2 = (x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2$$

$$= \left(\frac{7}{9} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{19}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{16}{9} - 3\right)^2$$

$$= \left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{11}{9}\right)^2$$

$$= \frac{256 + 100 + 121}{9^2}$$

$$= \frac{53}{9}.$$

La valeur exacte de la longueur AH est donc: $\dfrac{\sqrt{53}}{3}$.

3. a. Justifions qu'il existe un nombre réel " k " tel que $\overrightarrow{HB} = k \cdot \vec{u}$:

Pour répondre à cette question, nous allons résoudre l'équation: $\overrightarrow{HB} = k \cdot \vec{u}$.

$$\overrightarrow{HB} = k \cdot \vec{u} \iff \begin{pmatrix} x_B - x_H \\ y_B - y_H \\ z_B - z_H \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 - \frac{7}{9} \\ 3 - \frac{19}{9} \\ 0 - \frac{16}{9} \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{16}{9} = 2.k \\ \dfrac{8}{9} = -k \\ -\dfrac{16}{9} = 2.k \end{cases}$$

cad $k = -\dfrac{8}{9}$.

Il existe donc bien un nombre réel " k " tel que $\overrightarrow{HB} = k.\vec{u}$: $k = -\dfrac{8}{9}$.

3. b. Montrons que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$:

Nous devons montrer que: $\dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = k = -\dfrac{8}{9}$.

Or: • $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = -8$

• $\|\vec{u}\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9$.

Nous avons donc bien: $\dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = k = -\dfrac{8}{9}$.

3. c. Calculons " k " et retrouvons les coordonnées du point H:

Comme déjà fait: $k = -\dfrac{8}{9}$.

Dans ces conditions: $\overrightarrow{HB} = k.\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_B - x_H \\ y_B - y_H \\ z_B - z_H \end{pmatrix} = -\dfrac{8}{9}.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 - x_H \\ 3 - y_H \\ 0 - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{16}{9} \\ \dfrac{8}{9} \\ -\dfrac{16}{9} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -x_H \\ -y_H \\ -z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{16}{9} + 1 \\ \dfrac{8}{9} - 3 \\ -\dfrac{16}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{cad} \begin{cases} x_H = \dfrac{7}{9} \\ y_H = \dfrac{19}{9} \\ z_H = \dfrac{16}{9} \end{cases}.$$

" k " et les coordonnées du point H sont donc bien: • $k = -\dfrac{8}{9}$

$$\bullet \begin{cases} x_H = \dfrac{7}{9} \\ y_H = \dfrac{19}{9} \\ z_H = \dfrac{16}{9} \end{cases}.$$

4. Calculons l'aire du triangle ACH:

Le tétraèdre ABCH a pour **hauteur [HB]** et pour **base le triangle ACH**.

Nous savons que le volume d'un tétraèdre est donné par: $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$.

($\mathcal{B}$ = aire d'une base, h = hauteur relative à cette base)

Dans ces conditions: $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h \iff 3 \times V = \mathcal{B} \times h$

cad $\mathcal{B} = \frac{3 \times V}{h}$.

Ici:

- V = volume du tétraèdre ABCH $= \frac{8}{9}$
- $h = HB = \sqrt{\left(-\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{16}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$.

L'aire du triangle ACH est donc: $\mathcal{B} = \frac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}}$ **cad** $\mathcal{B} = 1$.

L'aire du triangle ACH est donc: $\mathcal{A}(ACH) = \mathcal{B} = 1$ **unité d'aire**.