BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

FRANCE MÉTROPOLITAINE

2022

$$f(x) = 3x\, e^{-0,5x+1}$$

CORRECTION

PARTIE A

1. a Calculons la dérivée f' de la fonction f sur $[0; 10]$:

Ici: • $f(x) = 3x\, e^{-0,5x+1}$ $(U \times e^V)$

• $\mathcal{D}f = [0; 10]$.

La fonction $f(x) = 3x\, e^{-0,5x+1}$ est dérivable sur $[0; 10]$, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 10]$.

Pour tout $x \in [0, 10]$: $f'(x) = (3) \times (e^{-0,5x+1}) + (3x) \times (-0,5e^{-0,5x+1})$

$(U' \times e^V + U \times V' e^V)$

$= (3 - 1,5x)\, e^{-0,5x+1}$

$= 3(-0,5x + 1)\, e^{-0,5x+1}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0; 10]$: $f'(x) = 3(-0,5x + 1)\, e^{-0,5x+1}$.

1. b. Déduisons-en le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 10]$:

• **Étudions le signe de f' sur $[0; 10]$:**

Distinguons deux cas pour tout $x \in [0; 10]$.

1er cas : $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff 3(-0,5x + 1)\,e^{-0,5x+1} \leqslant 0$

$\iff -0,5x + 1 \leqslant 0$ car $3\,e^{-0,5x+1} > 0$, pour tout $x \in [0; 10]$

cad $x \geqslant 2$ ou $x \in [2; 10]$.

2e cas : $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff 3(-0,5x + 1)\,e^{-0,5x+1} \geqslant 0$

$\iff -0,5x + 1 \geqslant 0$ car $3\,e^{-0,5x+1} > 0$, pour tout $x \in [0; 10]$

cad $x \leqslant 2$ ou $x \in [0; 2]$.

Ainsi : • f est croissante sur $[0; 2]$,

• f est décroissante sur $[2; 10]$.

• **Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 10]$:**

x	0		2		10
f'		+	0	-	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(0) = 0$

• $b = f(2) = 6$ (maximum de f sur $[0;\ 10]$)

• $c = f(10) = 30\ e^{-4}$.

1. c. c1. Au bout de combien de temps ?

La quantité de médicament présente dans le sang du patient sera maximale quand $x = 2$.

Ainsi, la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera maximale, 2 heures après la prise du comprimé.

1. c. c2. Déterminons alors la quantité maximale de médicament:

Il s'agit tout simplement de: $f(2)$.

Or, d'après la question précédente: $f(2) = 6$.

Ainsi, la quantité maximale de médicament sera de: 6 mg.

2. a. Montrons que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur $[0;\ 2]$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a;\ b]$ ou $I =]a;\ b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[0;\ 10]$, donc sur $[0;\ 2]$,

- " k = 5 " est compris entre: $f(0) = 0 < 5$

  et: $f(2) = 6 > 5$,

- f est strictement croissante sur $[0; 2]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 5$ ($k = 5$) admet bien une unique solution α appartenant à $[0; 2]$.

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $\alpha \approx 1,02$.

2. b. Déterminons, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament:

D'après l'énoncé, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur $[2; 10]$:

$$\beta \approx 3,46.$$

De plus, le traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à **5 mg**:

$$f(x) \geqslant 5.$$

Et d'après le tableau de variations, $f(x) \geqslant 5$. quand $x \in [\alpha; \beta]$.

Or: $\beta - \alpha \approx 2,44$.

Donc le traitement sera efficace pendant environ: 2, 44 heures soit 146 minutes.

PARTIE B

1. Calculons U_1:

Ici: • $U_{n+1} = f(U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• $U_0 = 2$.

De plus: " au bout d'une heure la quantité de médicament dans le sang diminue de 30% et on injecte à nouveau 1, 8 mg ".

Dans ces conditions: $U_1 = U_0 - 30\% \, U_0 + 1,8$

$= 2 - (30\% \times 2) + 1,8$

cad $U_1 = 3,2$ mg.

Ainsi, au bout d'une heure la quantité de médicament dans le sang sera de: 3, 2 mg.

2. Justifions que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 0,7 \, U_n + 1,8$:

• D'après l'énoncé: " le deuxième protocole consiste à injecter **initialement** au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de **2 mg** de médicament ".

D'où: $U_0 = 2$ mg.

• De plus, chaque heure:

• la quantité de médicament dans le sang diminue de **30%**,

• et, on réinjecte une nouvelle dose de **1, 8 mg**.

Soient: • U_{n+1}, la quantité de médicament (en mg) présente dans le sang immédiatement après l'injection de la (n+1)-ième heure,

- U_n, la quantité de médicament (en mg) présente dans le sang immédiatement après l'injection de la n-ième heure.

Pour tout entier naturel n, la quantité de médicament présente dans le sang à la (n + 1)-ième heure est égale à celle de la n-ième heure diminuée de **30%** **et** augmentée d'une nouvelle dose de **1, 8 mg**.

Pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 30\%\ U_n + 1,8$ **cad** $U_{n+1} = 0,7\,U_n + 1,8$.

Au total, pour tout entier naturel n: $U_{n+1} = 0,7\,U_n + 1,8$.

3\. a. **Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leqslant U_{n+1} < 6$:**

Ici:
- $U_{n+1} = 0,7\,U_n + 1,8$
- $U_0 = 2$ mg
- $U_1 = 3,2$ mg.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \leqslant U_{n+1} < 6$ ".

Initialisation: $U_0 \leqslant U_1 \leqslant 6$?

Comme, $2 \leqslant 3,2 < 6$, nous avons bien: $U_0 \leqslant U_1 < 6$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $U_n \leqslant U_{n+1} < 6$ et montrons qu'alors $U_{n+1} \leqslant U_{n+2} < 6$.

Supposons: $U_n \leqslant U_{n+1} < 6$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) => $0,7\,U_n \leqslant 0,7\,U_{n+1} < 0,7 \times 6$

=> $0,7\,U_n \leqslant 0,7\,U_{n+1} < 4,2$

=> $0,7\,U_n + 1,8 \leqslant 0,7\,U_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8$

=> $U_{n+1} \leqslant U_{n+2} < 6$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant U_{n+1} < 6$.

3. b. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$U_n \leqslant U_{n+1} < 6 \iff \begin{cases} U_n \leqslant U_{n+1} \\ U_n < 6 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est strictement majorée par } M = 6 \end{cases}$.

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

3. c. Déterminons la limite ℓ vers laquelle (U_n) converge:

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite ℓ telle que:

$$\ell = 0,7\,\ell + 1,8.$$

$\ell = 0,7\,\ell + 1,8 \iff \ell = 6$.

Au total, (U_n) converge vers ℓ avec : $\ell = 6$.

4. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison 0, 7 :

Ici : $V_n = 6 - U_n \iff V_{n+1} = 6 - U_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\iff V_{n+1} = 6 - (0,7\,U_n + 1,8)$ (1).

Or : $V_0 = 6 - U_0$ cad $V_0 = 4$ et $U_n = 6 - V_n$.

D'où : (1) $\iff V_{n+1} = 6 - (0,7 \times [6 - V_n] + 1,8)$

$= 6 - 0,42 + 0,7\,V_n + 1,8$

$= 0,7\,V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $V_0 = 4$.

4. b. b1. Déterminons l'expression de V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 0,7\,V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times (0,7)^n$ cad $V_n = 4 \times (0,7)^n$.

4. b. b2. Déduisons-en U_n en fonction de n :

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- $V_n = 4 \times (0,7)^n$
- $U_n = 6 - V_n$.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = 6 - (4 \times (0,7)^n)$ cad $U_n = 6 - 4\,(0,7)^n$.

4. c. Déterminons le nombre d'injections réalisées :

On arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est **supérieure ou égale à 5,5 mg**.

Il s'agit ici de résoudre l'inéquation: $U_n \geqslant 5,5$.

$$U_n \geqslant 5,5 \iff 6 - 4\,(0,7)^n \geqslant 5,5$$

$$\iff 4\,(0,7)^n \leqslant 0,5$$

$$\iff 0,7^n \leqslant 0,125$$

$$\iff \ln(0,7^n) \leqslant \ln(0,125)$$

$$\iff n \ln(0,7) \leqslant \ln(0,125)$$

cad $n \geqslant \dfrac{\ln(0,125)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$ $\quad$ ($\ln(0,7) < 0$)

ou encore $n \geqslant 6$ car: $n \in \mathbb{N}$.

Au total, il faudra réaliser 7 injections pour stopper le protocole.

Pourquoi 7 ? $\quad$ U_0 + 6 injections supplémentaires.