

www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ
EXERCICE 4



MAYOTTE, RÉUNION
2022

LA SPHÈRE...

CORRECTION

1. a. a₁. Calculons les coordonnées du point R:

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées des points A, B sont:

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

R est le milieu du segment [AB]

Dans ces conditions: $\bullet x_R = \frac{x_A + x_B}{2} = 3$

$$\bullet y_R = \frac{y_A + y_B}{2} = 2$$

$$\bullet z_R = \frac{z_A + z_B}{2} = -1$$

Les coordonnées du point R sont donc: $R = (3; 2; -1)$.

1. a. a₂. Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont donc: $\overrightarrow{AB} = (-4; 4; 0)$.

1. b. Montrons qu'une équation cartésienne du plan P , est $x - y - 1 = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

• le point $D \in P$, avec $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_D) + b(y - y_D) + c(z - z_D) = 0$

$$\Leftrightarrow -4x(x - 3) + 4x(y - 2) + 0x(z - (-1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 12 + 4y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x - 4y - 4 = 0$$

$$\text{cad } x - y - 1 = 0.$$

Une équation cartésienne du plan P , est donc: $x - y - 1 = 0$.

1. c. c₁. Montrons que le point $E \in P_1$:

Le point $E(10; 9; 8) \in P_1$ ssi ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de P_1 : $x - y - 1 = 0$.

Or: $10 - 9 - 1 = 0$.

Ainsi: le point E appartient bien au plan P_1 .

1. c. c₂. Montrons que $EA = EB$:

$$\begin{aligned} \bullet EA^2 &= (x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2 + (z_A - z_E)^2 \\ &= (5 - 10)^2 + (0 - 9)^2 + ((-1) - 8)^2 \\ &= 25 + 81 + 81 \\ &= 187. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet EB^2 &= (x_B - x_E)^2 + (y_B - y_E)^2 + (z_B - z_E)^2 \\ &= (1 - 10)^2 + (4 - 9)^2 + ((-1) - 8)^2 \\ &= 81 + 25 + 81 \\ &= 187. \end{aligned}$$

D'où $EA = EB = \sqrt{187}$ et donc nous avons bien: $EA = EB$.

2. a. Justifions que les plans P_1 et P_2 sont sécants:

Le plan P_2 a pour équation cartésienne: $x - z - 2 = 0$.

Pour montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants, nous devons résoudre le

système:
$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 & (P_1) & (1) \\ x - z - 2 = 0 & (P_2) & (2) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z + 1 = 0 & (1) - (2) \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z + 1 \\ x = z + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 2 \\ y = z + 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{cad } \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Comme le système admet une solution: les plans P_1 et P_2 sont sécants.

2. b. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ :

La droite Δ correspond à la droite d'intersection des plans P_1 et P_2 .

D'où une représentation paramétrique de la droite Δ est:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. Justifions que la droite Δ est sécante au plan P_3 en un point Ω :

Nous savons que: • une représentation paramétrique de la droite Δ est:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

• une équation cartésienne du plan P_3 est: $y + z - 3 = 0$.

Ω est le point d'intersection entre la droite Δ et le plan P_3 .

Les coordonnées du point Ω vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_{\Omega} = 2 + t & (1) \\ y_{\Omega} = 1 + t & (2) \\ z_{\Omega} = t & (3) \\ y_{\Omega} + z_{\Omega} - 3 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \Leftrightarrow (1 + t) + t - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 = 0$$

$$\text{cad } t = 1.$$

Les coordonnées du point Ω sont donc: • $x_{\Omega} = 2 + 1 = 3$

• $y_{\Omega} = 1 + 1 = 2.$

• $z_{\Omega} = 1 = 1$

4. a. Justifions que $\Omega_A = \Omega_B = \Omega_C = \Omega_D$:

Nous savons que: $A \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, D \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\Omega \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Dans ces conditions: • $\Omega A^2 = (x_A - x_{\Omega})^2 + (y_A - y_{\Omega})^2 + (z_A - z_{\Omega})^2$

$$= (5 - 3)^2 + (0 - 2)^2 + ((-1) - 1)^2$$

$$= 4 + 4 + 4$$

$$= 12$$

• $\Omega B^2 = (x_B - x_{\Omega})^2 + (y_B - y_{\Omega})^2 + (z_B - z_{\Omega})^2$

$$= (1 - 3)^2 + (4 - 2)^2 + ((-1) - 1)^2$$

$$= 4 + 4 + 4$$

$$= 12$$

• $\Omega C^2 = (x_C - x_{\Omega})^2 + (y_C - y_{\Omega})^2 + (z_C - z_{\Omega})^2$

$$= (1 - 3)^2 + (0 - 2)^2 + (3 - 1)^2$$

$$= 4 + 4 + 4$$

$$= 12$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \Omega D^2 &= (x_D - x_\Omega)^2 + (y_D - y_\Omega)^2 + (z_D - z_\Omega)^2 \\
 &= (5 - 3)^2 + (4 - 2)^2 + (3 - 1)^2 \\
 &= 4 + 4 + 4 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

Nous avons donc bien: $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = 2\sqrt{3}$.

4. b. Déduisons-en que A, B, C et D appartiennent à une même sphère:

Comme $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$, le point Ω est équidistant des points A, B, C et D.

Le point Ω correspond donc au centre de la sphère de rayon $2\sqrt{3}$ contenant les points A, B, C et D.

D'où:
 • le centre de la sphère est $\Omega(3; 2; 1)$
 • le rayon de la sphère est $r = 2\sqrt{3}$.