BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

MAYOTTE, RÉUNION
2022

$f(x) = 1 + x - e^{0,5x - 2}$

CORRECTION

PARTIE A

1. a. Déterminons la limite de la fonction f en $-\infty$:

Ici: • $f(x) = 1 + x - e^{0,5x - 2}$ $\quad (U - e^V)$

• $\mathcal{D}f = IR$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 + x - e^{0,5x-2}.$$

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + x = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{0,5x-2} = 0.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty - 0 = -\infty.$

1. b. b1. Montrons que pour tout $x \in IR^*$, $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \dfrac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2}\right)$:

Pour tout $x \in IR^*$: $f(x) = 1 + x - e^{0,5x - 2}$

$$= 1 + (0,5x \times 2) - e^{0,5x} \times e^{-2}$$

$$= 1 + (0,5x \times 2) - \left(0,5x \times \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2}\right)$$

$$= 1 + 0,5x\left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2}\right).$$

Ainsi pour tout $x \in IR^*$, nous avons bien: $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2}\right).$

1. b. b2. Déduisons-en la limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + x - e^{0,5x-2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + 0,5x\left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2}\right).$$

Or d'après le cours:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 0,5x = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{0,5x}}{0,5x} = +\infty$ (Croissances Comparées).

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 + (+\infty) \times \left[2 - (+\infty) \times \frac{1}{e^2}\right]$

$$= 1 + (+\infty) \times (-\infty)$$

$$= -\infty.$$

2. a. Déterminons $f'(x)$ pour tout réel x:

La fonction $f(x) = 1 + x - e^{0,5x-2}$ est dérivable sur IR.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in IR$.

Pour tout $x \in IR$: $f'(x) = 1 - 0,5e^{0,5x-2}$ $(U' - V' e^{V})$.

Ainsi pour tout $x \in IR$: $f'(x) = 1 - 0,5e^{0,5x-2}$.

2. b. Résolvons l'inéquation $f'(x) < 0$:

$f'(x) < 0 \iff 1 - 0,5e^{0,5x-2} < 0$

$\iff 0,5e^{0,5x-2} > 1$

$\iff e^{0,5x-2} > 2$

$\iff 0,5x-2 > \ln(2)$

$\iff 0,5x > \ln(2) + 2$

cad $x > 2\ln(2) + 4$ ou encore $x \in \left]2\ln(2) + 4 ; +\infty\right[$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est bien:

$\left]2\ln(2) + 4 ; +\infty\right[$.

Et donc:
- f est croissante sur $\left]-\infty ; 2\ln(2) + 4\right[$,
- f est décroissante sur $\left]2\ln(2) + 4 ; +\infty\right[$.

3. Déduisons-en le tableau de variations de f sur IR:

Le tableau de variations de la fonction f sur IR est:

x	$-\infty$		$2\ln(2)+4$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

• $b = f(2\ln(2)+4) = 1 + (2\ln(2)+4) - e^{\ln(2)+2-2}$

$= 5 + 2\ln(2) - e^{\ln(2)}$

$= 5 + 2\ln(2) - 2$

$= 3 + 2\ln(2)$ (image de $4 + 2\ln(2)$ par f)

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

4. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-1; 0]$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $]-\infty; 4 + 2\ln(2)[$, donc sur $[-1; 0]$

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(-1) = -e^{-\frac{5}{2}} < 0$

et: $f(0) = 1 - e^{-2} > 0$

- f est strictement croissante sur $[-1; 0]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[-1; 0]$.

PARTIE B

1. a. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$:

Ici:
- $U_{n+1} = f(U_n)$ cad $U_{n+1} = 1 + x - e^{0,5x-2}$
- $U_0 = 0$
- $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$ ".

Initialisation: $U_0 \leqslant U_1 \leqslant 4$?

$$\begin{cases} U_0 = 0 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ U_1 = 1 + U_0 - e^{0,5U_0 - 2} \quad \text{cad} \quad U_1 = 1 - e^{-2}. \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $U_0 \leqslant U_1 \leqslant 4$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$ et montrons qu'alors $U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 4$.

Supposons: $U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Notons que: • $4 \leqslant 4 + 2\ln(2)$

• f est croissante sur $]-\infty; 4 + 2\ln(2)[$.

Donc: **f est croissante sur $[0; 4]$.**

D'où: $(1) \Rightarrow U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4 \Rightarrow f(U_n) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(4)$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant f(4)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 4 \quad (f(4) = 4).$$

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$.**

1. b. Déduisons-en que la suite (U_n) converge:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4 \iff \begin{cases} U_n \leqslant U_{n+1} \\ U_n \leqslant 4 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = 4 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc: **Oui, la suite (U_n) est convergente.**

2\. a. Démontrons que $\ell = 4$:

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite ℓ telle que:

$$f(\ell) = \ell.$$

$f(\ell) = \ell \iff 1 + \ell - e^{0,5\ell - 2} = \ell$

$\iff 1 - e^{0,5\ell - 2} = 0$

$\iff e^{0,5\ell - 2} = 1$

$\iff 0,5\ell - 2 = \ln(1)$

$\iff 0,5\ell = 2$ cad $\ell = 4$.

Ainsi, la suite (U_n) est convergente et converge vers $\ell = 4$.

2\. b. Interprétons ce résultat dans le contexte de l'exercice:

Ici l'instruction valeur (3, 99) renvoie la valeur 12.

Interprétation: L'algorithme calcule les premiers termes de la suite (U_n) jusqu'à celui qui est supérieur à 3, 99.

U_{12} est le premier terme supérieur à 3, 99.