BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

CENTRES ÉTRANGERS 2

2022

LES TÉTRAÈDRES AN_1MM' & AN_2MM'

CORRECTION

1. a. Donnons les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}\,'$ de la droite D':

Une représentation paramétrique de la droite D' est: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, nous pouvons affirmer qu'un vecteur directeur $\vec{u}\,'$ de la droite D' est: $\vec{u}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. b. Montrons que les droites D et D' ne sont pas parallèles:

Les droites D et D' ne sont **pas parallèles** si leurs vecteurs directeurs respectifs **ne sont pas colinéaires**.

Or:
- un vecteur directeur de D est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- un vecteur directeur de D' est $\vec{u}\,'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ici: $x_{\vec{u'}} = 0 \times x_{\vec{u}}$ **et** $y_{\vec{u'}} \neq 0 \times y_{\vec{u}}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

Dans ces conditions: les droites D et D' ne sont pas parallèles.

1. c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite D:

Notons que la droite D passe par le point A (2; 4; 0) et a $\vec{u}$ comme vecteur directeur.

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ (a; b; c) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite D passe par le point A (2; 4; 0),

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite D passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{n}$ (1; 2; 0) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 2 + 1 \times t \\ y = 4 + 2 \times t \\ z = 0 + 0 \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite D est donc:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. a. Montrons que le vecteur $\vec{v}$ (2 ; - 1 ; 1) est un vecteur directeur de Δ:

La droite Δ est perpendiculaire aux droites D et D', et coupe ces deux droites en M et M'.

Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ s'il est orthogonal aux vecteurs directeurs des droites D et D' à savoir: $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$.

Or: $\begin{cases} \vec{v} \text{ et } \vec{u} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{v} \text{ et } \vec{u}\,' \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{v} \cdot \vec{u}\,' = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\vec{v} \cdot \vec{u} = (2 \times 1) + ((- 1) \times 2) + (1 \times 0) = 0$

• $\vec{v} \cdot \vec{u}\,' = (2 \times 0) + ((- 1) \times 1) + (1 \times 1) = 0.$

Comme $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{u}\,'$: $\vec{v}$ est bien un vecteur directeur de Δ.

3. a. Montrons que $\vec{n}$ (2 ; - 1 ; - 5) est un vecteur normal au plan P:

P est le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P ssi il est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan P, avec $\vec{u}$ $(1; 2; 0)$ et $\vec{v}$ $(2; -1; 1)$.

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \vec{v} = 0. \end{cases}$

Nous avons:
- $\vec{n} \cdot \vec{u} = (2 \times 1) + ((-1) \times 2) + ((-5) \times 0) = \mathbf{0}$
- $\vec{n} \cdot \vec{v} = (2 \times 2) + ((-1) \times (-1)) + ((-5) \times 1) = \mathbf{0}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc bien normal au plan P.

3. b. Déduisons-en qu'une équation cartésienne de P est $2x - y - 5z = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}$ $(a; b; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici:
- un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$
- le point $A \in P$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\iff 2 \times (x - 2) + (-1) \times (y - 4) + (-5) \times (z - 0) = 0$

cad $\mathbf{2x - y - 5z = 0}$.

Une équation cartésienne du plan P est donc bien: $2x - y - 5z = 0$.

3. c. c_1. Justifions que M' est également le point d'intersection de D' et du plan P:

Le plan **P** contient la droite **Δ** et **M'** est un point de la droite **Δ**.

Donc **M'** est un point du plan **P**.

M' appartient à D' et à P: donc M' est bien le point d'intersection de la droite D' et du plan P.

3. c. c_2. Déterminons les coordonnées du point M':

Les coordonnées du point **M'** vérifient le système:

$$\begin{cases} x_{M'} = 3 & (1) \\ y_{M'} = 3 + t & (2) \\ z_{M'} = 3 + t & (3) \\ 2x_{M'} - y_{M'} - 5z_{M'} = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$(4) \iff 2x_{M'} - y_{M'} - 5z_{M'} = 0 \iff 2 \times (3) - (3 + t) - 5 \times (3 + t) = 0$

$\iff 6 - 3 - t - 15 - 5t = 0$

$\iff -6t - 12 = 0$

cad $t = -2$.

Les coordonnées du point M' sont donc:
- $x_{M'} = 3 = 3$
- $y_{M'} = 3 + (-2) = 1$.
- $z_{M'} = 3 + (-2) = 1$

4. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ:

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici:
- la droite Δ passe par le point M' (3 ; 1 ; 1),
- un vecteur directeur de la droite Δ est: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point M' et de vecteur directeur $\vec{v}$ (2 ; -1 ; 1) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \times t' \\ y = 1 + (-1) \times t' \\ z = 1 + 1 \times t' \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t' \\ y = 1 - t' \quad , t' \in IR. \\ z = 1 + t' \end{cases}$$

4. b. Justifions que le point M a pour coordonnées (1 ; 2 ; 0):

Le point **M (1 ; 2 ; 0)** est le point d'intersection des droites **D** et **Δ**.

Ses coordonnées doivent donc vérifier le système:

$$\begin{cases} x_M = 2 + t \\ y_M = 4 + 2t \qquad (D) \\ z_M = 0 \\ \dots \qquad\qquad\qquad (I). \\ x_M = 3 + 2t' \\ y_M = 1 - t' \qquad (\Delta) \\ z_M = 1 + t' \end{cases}$$

$$(I) \iff \begin{cases} 2 + t = 3 + 2t' \\ 4 + 2t = 1 - t' \\ 0 = 1 + t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2 + t = 3 + 2t' \\ 4 + 2t = 2 \\ t' = -1 \end{cases}$$

cad $\begin{cases} t = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$.

Dans ces conditions les coordonnées du point M sont donc bien:

- $x_M = 2 + (-1) = 1$
- $y_M = 4 + 2 \times (-1) = 2$
- $z_M = 0 = 0$

4. c. Calculons la distance MM':

La distance MM' est: $MM' = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (1-0)^2}$

$= \sqrt{6}.$

La distance MM' est donc égale à: $\sqrt{6}$.

5. a. Montrons que la droite d est parallèle au plan P:

Pour cela, nous allons montrer qu'il n'y a pas de point d'intersection entre la droite **d** et le plan **P**.

Soit **X** $(x\,;y\,;z)$ le point d'intersection entre la droite **d** et le plan **P**.

Ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ doivent alors vérifier le système:

$$\begin{cases} x = 5t & (1) \\ y = 2 + 5t & (2) \\ z = 1 + t & (3) \\ 2x - y - 5z = 0 & (4) \end{cases}.$$

A l'aide des équations **(1)**, **(2)** et **(3)**, nous pouvons écrire:

(4) $\iff 2x - y - 5z = 0 \iff 2 \times (5t) - (2 + 5t) - 5 \times (1 + t) = 0$

$\iff 10t - 2 - 5t - 5 - 5t = 0$

$\iff -7 = 0$, **ce qui est impossible !**

Par conséquent, pas de point d'intersection et donc: **d et P sont parallèles.**

5. b. Exprimons le volume du tétraèdre ANMM' en fonction de ℓ:

Le tétraèdre ANMM' a pour **hauteur ℓ** et pour **base le triangle (AMM'), rectangle en M.**

Nous savons que le volume du tétraèdre ANMM' est donné par:

$$V_{ANMM'} = \frac{(\text{ Aire base triangle AMM' }) \times (\text{ Hauteur tétraèdre ANMM' })}{3}$$

$$= \frac{(\text{ Aire base triangle rectangle AMM' }) \times \ell}{3}.$$

Or: $AM = \sqrt{5}$ et $MM' = \sqrt{6}$.

D'où: $$V_{ANMM'} = \frac{\left[\frac{AM \times MM'}{2}\right] \times \ell}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{6}}{6} \times \ell.$$

Le volume du tétraèdre ANMM' est donc: $V_{ANMM'} = \frac{\sqrt{30}}{6} \times \ell$.

5. c. Les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont-ils le même volume ?

Comme la droite **d** est parallèle au plan **P**: **les distances de N_1 et N_2 au plan P sont égales**.

De plus, **les bases** des tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' sont **identiques** et correspondent au triangle **(AMM')**.

Donc **oui**: **les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.**