BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

CENTRES ÉTRANGERS 2
2022

LA PYRAMIDE CGFI

CORRECTION

1. a. Donnons les coordonnées des points C, F et G:

Dans le repère orthonormé (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$), les coordonnées des points C, F et G sont:

- C (1; 1; 0) car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AD}$
- F (1; 0; 1) car $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AE}$
- G (1; 1; 1) car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AE}$.

Ainsi, les coordonnées des points C, F et G sont:

$$C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. b. Montrons que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI):

Les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CI}$ ont pour coordonnées:

- $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} x_F - x_C \\ y_F - y_C \\ z_F - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 0 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{CI} = \begin{pmatrix} x_I - x_C \\ y_I - y_C \\ z_I - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ \frac{1}{2} - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CI}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires**.

Les points C, F et I ne sont donc pas alignés et définissent le plan (CFI).

Le vecteur $\vec{n}$ (1 ; 2 ; 2) est normal au plan **(CFI)** ssi ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CI}$ du plan **(CFI)**.

Or : $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{CF} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \, . \, \overrightarrow{CF} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{CI} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \, . \, \overrightarrow{CI} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\vec{n} \, . \, \overrightarrow{CF} = (1 \times 0) + (2 \times (-1)) + (1 \times 1) = 0$

• $\vec{n} \, . \, \overrightarrow{CI} = (1 \times (-1)) + \left(2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right) + (2 \times 1) = 0.$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CI}$: le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (CFI).

1. c. Déterminons une équation cartésienne du plan (CFI):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A (x_A ; y_A ; z_A) et un vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) s'écrit:

$$a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

• le point $C \in (CFI)$, avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_C) + b(y - y_C) + c(z - z_C) = 0$

$\iff 1 \times (x - 1) + 2 \times (y - 1) + 2 \times (z - 0) = 0$

cad $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (CFI) est donc: $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

2. a. **Déterminons une représentation paramétrique de la droite (d):**

Notons que la droite **(d)** passe par le point **G** et est orthogonale au **plan (CFI)**.

D'après le cours, nous savons que:

• Soit $A (x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.

• Soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) un vecteur non nul de l'espace.

• La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in I\!R.$$

Ici: • la droite **(d)** passe par le point **G (1; 1; 1)**,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite **(d)** est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite **(d)** passant par le point G et de vecteur directeur $\vec{n}$ (1 ; 2 ; 2) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 1 \times t \\ y = 1 + 2 \times t \\ z = 1 + 2 \times t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

2. b. Montrons que le point K $\left(\frac{7}{9} ; \frac{5}{9} ; \frac{5}{9} \right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI):

Le point K est le projeté orthogonal de G sur le plan **(CFI)**.

Les coordonnées du point K vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_K = 1 + t & (1) \\ y_K = 1 + 2t & (2) \\ z_K = 1 + 2t & (3) \\ x_K + 2y_K + 2z_K - 3 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$(4) \iff x_K + 2y_K + 2z_K - 3 = 0 \iff (1 + t) + (2 + 4t) + (2 + 4t) - 3 = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad 9t + 2 = 0$$

$$\text{cad} \quad t = -\frac{2}{9}.$$

Les coordonnées du point K sont donc:

- $x_K = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$
- $y_K = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{9} \right) = \frac{5}{9}$.
- $z_K = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{9} \right) = \frac{5}{9}$

2. c. Calculons la distance du point G au plan (CFI):

La distance du point G au plan **(CFI)** est: **GK.**

$$GK^2 = \left(\frac{7}{9} - 1 \right)^2 + \left(\frac{5}{9} - 1 \right)^2 + \left(\frac{5}{9} - 1 \right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{9} \right)^2 + \left(\frac{4}{9} \right)^2 + \left(\frac{4}{9} \right)^2$$

$$= \frac{36}{81}.$$

D'où: $GK = \sqrt{\frac{36}{81}}$ cad $GK = \frac{2}{3}$.

La distance du point G au plan (CFI) est donc égale à: $\frac{2}{3}$.

3. a. Montrons que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\frac{1}{6}$:

Nous savons que: **volume d'une pyramide** $= \frac{1}{3} \times b \times h$.

(b = aire d'une base, h = hauteur à cette base)

En considérant I comme sommet, la pyramide **GCFI** a pour **hauteur** [IJ] et **pour base le triangle GFC, rectangle en C**.

Or: • $IJ = 1$ $\quad (= h)$

• $\mathcal{A}(GFC)$ = aire du triangle GFC $= \frac{GF \times GC}{2} = \frac{1}{2}$. $\quad (= b)$

Dans ces conditions, le volume de la pyramide **GCFI** est: $V_{GCFI} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1$.

Le volume de la pyramide GCFI est donc égal à: $\frac{1}{6}$ unité de volume.

3. b. Déduisons-en l'aire du triangle CFI, en unité d'aire:

En considérant G comme sommet, la pyramide **GCFI** a pour **hauteur** [GK] et pour **base le triangle CFI**.

Or: $V_{Pyramide} = \frac{1}{6}$, $\quad GK = \frac{2}{3}$ $\quad$ et $\quad V_{Pyramide} = \frac{1}{3} [\mathcal{A}(CFI) \times GK]$.

D'où: $\mathcal{A}(CFI) = \frac{3 \times V_{Pyramide}}{GK}$.

L'aire du triangle CFI est donc: $\mathcal{A}(CFI) = \dfrac{3 \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$ **unité d'aire.**