BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

CENTRES ÉTRANGERS 2

2022

$$U_{n+1} = k \cdot U_n \cdot (1 - U_n)$$

CORRECTION

PARTIE 1

1. a Étudions les variations de f sur $[0; 1]$:

Ici: • $f(x) = 1,9x(1 - x)$ $(U \times V)$

• $\mathcal{D}f = [0; 1]$.

• Calculons f':

La fonction $f(x) = 1,9x(1 - x)$ est dérivable sur IR, et donc sur $[0; 1]$, comme produit de deux fonctions polynômes dérivables sur IR et donc sur $[0; 1]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 1]$.

Pour tout $x \in [0; 1]$: $f'(x) = (1,9) \times (1 - x) + (1,9x) \times (-1)$

$(U' \times V + U \times V')$

$= -3,8x + 1,9$.

• Étudions le signe de f' sur $[0; 1]$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in [0; 1]$.

1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff -3,8x + 1,9 \leqslant 0$ cad $x \geqslant \frac{1}{2}$ ou $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff -3,8x + 1,9 \geqslant 0$ cad $x \leqslant \frac{1}{2}$ ou $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

• Dressons le tableau de variations de f sur $[0; 1]$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = 0$

• $b = 0,475$ (maximum de f sur $[0; 1]$)

• $c = 0$.

Ainsi: • f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

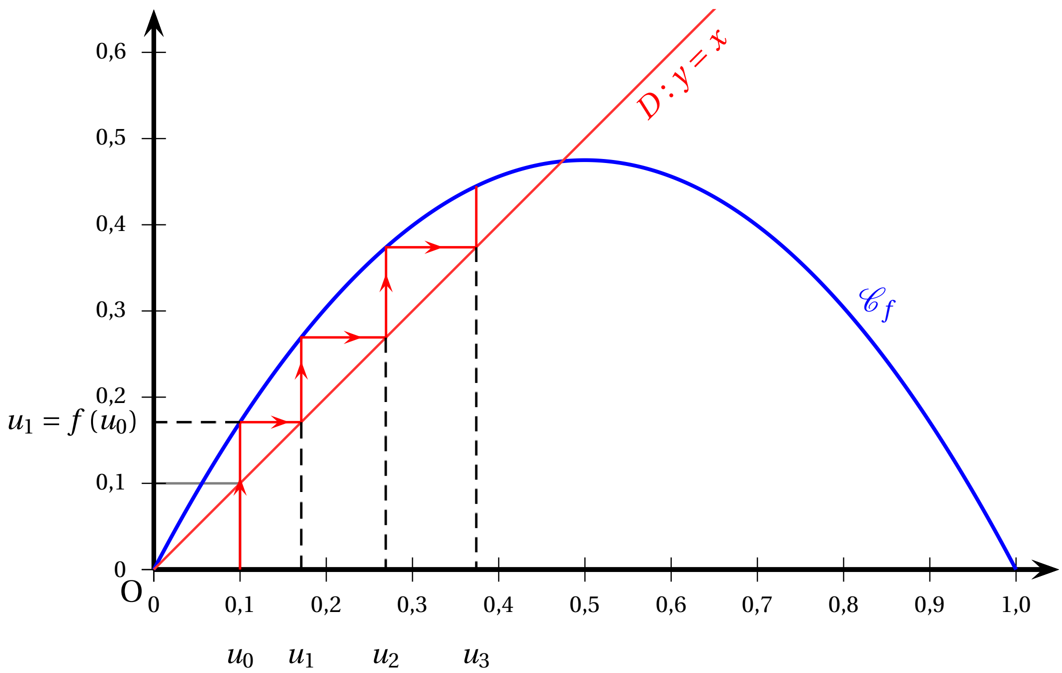
• f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

1.b Déduisons-en que si $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ alors $f(x) \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$:

D'après le tableau de variations: si $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, alors $f(x) \in [0; 0,475]$.

Comme $0,475 < \frac{1}{2}$: si $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, alors $f(x) \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2. Conjecturons le sens de variation de la suite (U_n) et sa limite:



D'après le graphique, nous pouvons dire que:

- la suite (U_n) semble être croissante
- la suite (U_n) semble converger vers le point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la droite D.

3. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$:

Ici:
- $U_{n+1} = f(U_n) = 1,9 \times U_n \times (1 - U_n)$
- $U_0 = 0,1$
- $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ ".

Initialisation: $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant \frac{1}{2}$?

$U_0 = 0,1$, d'après l'énoncé

et

$U_1 = 1,9 \times U_0 \times (1 - U_0)$ **cad** $U_1 = 0,171$.

Nous avons donc bien: $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ et montrons qu'alors $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$.

Supposons: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Notons que: f est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

D'où: (1) $\Rightarrow$ $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $f(0) \leqslant f(U_n) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(\frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 0,475 \leqslant 0,5$

$\Rightarrow$ $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

3. b. Déduisons-en que la suite (U_n) converge:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \iff \begin{cases} U_n \leqslant U_{n+1} \\ U_n \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

3. c. Déterminons sa limite:

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite ℓ telle que:

$$f(\ell) = \ell.$$

$$f(\ell) = \ell \iff 1,9 \times \ell \times (1 - \ell) = \ell$$

$$\iff 1,9(1 - \ell) = 1$$

$$\iff \ell = \frac{1,9 - 1}{1,9} \text{ cad } \ell \approx 0,474.$$

Au total, (U_n) converge vers ℓ avec: $\ell \approx 0,474$.

PARTIE 2

1. Montrons que la suite (U_n) converge et déterminons sa limite:

Ici: • $U_{n+1} = \frac{1}{2} \times U_n (1 - U_n)$

• $U_0 = \frac{1}{4}$

• $0 \leqslant U_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons: • $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in] 0 ; 1 [$.

Par conséquent, d'après le **théorème des gendarmes**, nous pouvons affirmer

que: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Ainsi, la suite (U_n) est convergente et converge vers $\ell = 0$.

2. Expliquons pourquoi:

Ici, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la boucle ***while*** ne tourne pas indéfiniment ce qui permet à la commande ***algo(p)*** de renvoyer une valeur.

En effet, la boucle s'arrête quand u ⩽ 10 ** (-p), cad pour la première valeur de n vérifiant $U_n \leqslant 10^{-p}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$, il y a une première valeur n_0 à partir de laquelle on a:

$U_n \leqslant 10^{-p}$, pour tout $n \geqslant n_0$. **CQFD**