BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

CENTRES ÉTRANGERS 1

2022

URNE, JETONS BLANCS & NOIRS

CORRECTION

1. a. Modélisons la situation à l'aide d'un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- **N** = " le jeton est noir ".
- **B** = " le jeton est blanc ".
- L'urne contient:
  - 2 jetons noirs
  - 3 jetons blancs.

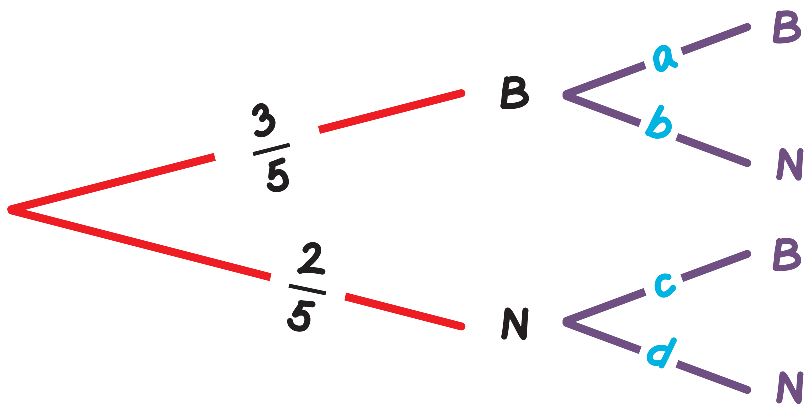
- $P(N) = \frac{2}{5}$
- $P(B) = \frac{3}{5}$.

- $P_B(B) = \frac{3}{5}$
- $P_B(N) = \frac{2}{5}$.

- $P_N(B) = \frac{3}{5}$

- $P_N(N) = \frac{2}{5}$.

D'où l'arbre de probabilités est le suivant:



, avec:

- $a = \frac{3}{5}$
- $b = \frac{2}{5}$
- $c = \frac{3}{5}$
- $d = \frac{2}{5}$

1. b. Calculons la probabilité de perdre 9 € sur une partie:

Le joueur perd **9€** si les deux jetons tirés sont de couleur blanche.

La probabilité de perdre **9€** sur une partie revient donc à calculer:

$$P(B \cap B).$$

$$P(B \cap B) = P_B(B) \times P(B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{9}{25}.$$

Ainsi la probabilité de perdre **9€** sur une partie est donc égale à:

$$\frac{9}{25}.$$

2. a. a₁. Déterminons la loi de probabilité de V. A. X, avec 2 noirs et 3 blancs:

- Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X sont:

-9 € (2 blancs), - 1 € (2 noirs), +5 € (couleurs différentes).

Ainsi, X (Ω) l'ensemble des valeurs que peut prendre la V. A. X est:

$$X(\Omega) = \{-9\text{ €} ; -1\text{ €} ; +5\text{ €}\}.$$

- Et nous avons: • $P(X = -9\text{ €}) = \dfrac{9}{25}$

• $P(X = -1\text{ €}) = P(N \cap N)$

$= P_N(N) \times P(N)$

$= \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5}$

$= \dfrac{4}{25}$

• $P(X = +5\text{ €}) = 1 - \dfrac{9}{25} - \dfrac{4}{25}$

$= \dfrac{12}{25}.$

- La loi de probabilité de X est donc:

x_i	-9 €	-1 €	+5 €
$P(X = x_i)$	$\dfrac{9}{25}$	$\dfrac{4}{25}$	$\dfrac{12}{25}$

2\. a. a_2. Déterminons la loi de probabilité de la V. A. X, avec " x " jetons noirs et 3 jetons blancs:

A présent, il y a " x " jetons noirs dans l'urne avec: $x \geqslant 2$.

- Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X sont:

-9 € (2 blancs), -1 € (2 noirs), +5 € (couleurs différentes).

Ainsi, X (Ω) l'ensemble des valeurs que peut prendre la V. A. X est:

$$X(\Omega) = \{ -9 \text{ €} ; -1 \text{ €} ; +5 \text{ €} \}.$$

- Notons que:
  - $P(N) = \dfrac{x}{3+x}$
  - $P(B) = \dfrac{3}{3+x}$
  - $P_B(B) = \dfrac{3}{3+x}$
  - $P_B(N) = \dfrac{x}{3+x}$
  - $P_N(B) = \dfrac{3}{3+x}$
  - $P_N(N) = \dfrac{x}{3+x}$
  - $P(B \cap B) = \left(\dfrac{3}{3+x} \right)^2$

• $P(N \cap N) = \left(\dfrac{x}{3+x}\right)^2$.

• Dans ces conditions: • $P(X = -9€) = P(B \cap B) = \left(\dfrac{3}{3+x}\right)^2$

• $P(X = -1€) = P(N \cap N) = \left(\dfrac{x}{3+x}\right)^2$

• $P(X = +5€) = 1 - P(B \cap B) - P(N \cap N)$

$= 1 - \left(\dfrac{3}{3+x}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{3+x}\right)^2$

$= 1 - \left[\dfrac{9+x^2}{(3+x)^2}\right]$

$= \dfrac{6x}{(3+x)^2}$.

• La loi de probabilité de X est donc:

x_i	-9€	-1€	+5€
$P(X = x_i)$	$\dfrac{9}{(3+x)^2}$	$\dfrac{x^2}{(3+x^2)}$	$\dfrac{6x}{(3+x)^2}$

2. b. Résolvons l'inéquation " $-x^2 + 30x - 81 > 0$ ":

Etape 1: Détermination de l'ensemble de définition.

Ici: $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

Etape 2: Détermination des deux racines.

Soit l'équation: $-x^2 + 30x - 81 = 0$.

$\Delta = 900 - 4 \times (1 \times 81) = 576 = (24)^2 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

- $x_1 = \dfrac{-30 - 24}{-2} = 27$

- $x_2 = \dfrac{-30 + 24}{-2} = 3$.

Ainsi nous pouvons écrire: $-x^2 + 30x - 81 = -(x-3)(x-27)$.

Etape 3: Le tableau de signes.

x	$-\infty$		3		27		$+\infty$
$x - 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 27$		$-$		$-$	0	$+$	
$-(x-3)(x-27)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En conclusion: " $-x^2 + 30x - 81 > 0$ " quand $x \in]3; 27[$.

2. c. Déterminons le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur:

Le jeu est favorable au joueur ssi: **E (X) > 0**.

Or: $\mathbf{E\,(X)} = \left[(-9) \times \dfrac{9}{(3+x)^2} \right] + \left[(-1) \times \dfrac{x^2}{(3+x)^2} \right] + \left[(5) \times \dfrac{6x}{(3+x)^2} \right]$

$$= \frac{1}{(3+x)^2} \times (-81 - x^2 + 30x)$$

$$= \frac{-x^2 + 30x - 81}{(3+x)^2}.$$

Dans ces conditions, comme $(3+x)^2 > 0$, **E (X) > 0** quand " $-x^2 + 30x - 81 > 0$ " cad quand: $x \in \,]\,3\,;\,27\,[$.

Ainsi pour que le jeu soit favorable au joueur, le nombre " x " de jetons noirs doit être tel que: $3 < x < 27$.

2. d. Calculons le nombre de jetons noirs nécessaires pour que le gain moyen du joueur soit maximal:

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]\,3\,;\,27\,[$ par:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 30x - 81}{(3+x)^2}. \qquad (= \mathrm{E\,(X)})$$

Le nombre de jetons noirs nécessaires pour que le gain moyen du joueur soit maximal correspond à la valeur particulière "**N**" telle que: $f'(\mathrm{N}) = 0$.

$$f'(\mathrm{N}) = 0 \iff \frac{(-2\mathrm{N} + 30) \times (3+\mathrm{N})^2 - (-\mathrm{N}^2 + 30\mathrm{N} - 81) \times (2\mathrm{N} + 6)}{(3+\mathrm{N})^4} = 0$$

$$\left[\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2} \right]$$

$\iff -36(N-7) = 0$ **cad**: $n = 7$.

En conclusion, si l'urne contient 3 jetons blancs et 7 jetons noirs: le gain moyen du player sera **maximal**!

3. Déterminons la probabilité d'avoir au moins un joueur gagnant 5 euros:

A présent, l'urne contient **7 jetons noirs** ($x = 7$) et **3 jetons blancs**.

Dans ces conditions, la probabilité de gagner 5 euros est égale à:

$$p = \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} = 0,42.$$

Nous sommes donc en présence d'**une loi binomiale** de paramètres $n = 10$ et $p = 0,42$: $X \rightsquigarrow B(10\,;\,0,42)$.

Déterminer la probabilité d'avoir au moins un joueur gagnant 5 euros revient à calculer: $P(X \geq 1)$, avec $B \rightsquigarrow (10\,;\,0,42)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - \binom{10}{0} (0,42)^0 (1 - 0,42)^{10}$$

$= 1 - (0,58)^{10}$

$\approx$ **0, 996**. (**calculatrice**).

Au total, la probabilité d'avoir au moins un joueur gagnant 5 euros est d'environ: 99, 6%.