BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

CENTRES ÉTRANGERS 1

2022

L'AIRE DU TRIANGLE BCD

CORRECTION

1. Montrons que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires:

Nous savons que: $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$ et $D(0;4;-1)$.

Les points A, B, C et D sont **coplanaires** ssi il existe deux réels **a** et **b** tels que:

$$\overrightarrow{AD} = a\,.\,\overrightarrow{AB} + b\,.\,\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{AD} = a\,.\,\overrightarrow{AB} + b\,.\,\overrightarrow{AC} \iff \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \\ z_D - z_A \end{pmatrix} = a\,.\begin{pmatrix} 6-3 \\ 1-(-2) \\ 5-2 \end{pmatrix} + b\,.\begin{pmatrix} 6-3 \\ -2-(-2) \\ -1-2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-(-2) \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+3b \\ 3a \\ 3a-3b \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3a+3b=-3 \\ 3a=6 \\ 3a-3b=-3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 & (1) \\ a = 2 & (2) \\ a - b = -1 & (3) \end{cases}$$

$$\text{cad} \begin{cases} b = -1 - a = -3 & (1) \\ a = 2 & (2) \\ b = 1 + a = 3 & (3) \end{cases} .$$

Comme $-3 \neq 3$, le système est impossible et donc il n'existe pas deux réels a et b: A, B, C et D ne sont, par conséquent, pas coplanaires.

2. a. Montrons que le triangle ABC est rectangle en A:

Le triangle ABC est rectangle en A ssi: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Or: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 1-(-2) \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ -2-(-2) \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ -2-1 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions: • $AB^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 27$

• $AC^2 = 3^2 + 0^2 + (-3)^2 = 18$

• $BC^2 = 0^2 + (-3)^2 + (-6)^2 = 45$.

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est rectangle en A.

2. b. Montrons que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC):

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et définissent le plan (ABC).

La droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) ssi le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ du plan (ABC).

Or: $\begin{cases} \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = (-3 \times 3) + (6 \times 3) + (-3 \times 3) = 0$

• $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3 \times 3) + (6 \times 0) + (-3 \times (-3)) = 0$.

Comme $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$: la droite (AD) est donc perpendiculaire au plan (ABC).

2. c. Déduisons-en le volume du tétraèdre ABCD:

Le tétraèdre ABCD a pour **hauteur [AD]** et pour **base le triangle rectangle en A, (ABC).**

Nous savons que le volume du tétraèdre ABCD est donné par:

$$\frac{(\text{Aire base triangle }(ABC)) \times (\text{Hauteur tétraèdre }ABCD)}{3}$$

$$= \frac{(\text{Aire base triangle }(ABC)) \times AD}{3}$$

$$= \frac{\mathcal{A}(ABC) \times AD}{3}$$

$$= \frac{\left[\frac{AB \times AC}{2}\right] \times AD}{3}$$

$$= \frac{\left[\frac{\sqrt{27} \times \sqrt{18}}{2}\right] \times \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2}}{3}$$

$$= \frac{\left[\frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}}{2}\right] \times 3\sqrt{6}}{3}$$

$= 27$ unités de volume.

Le volume du tétraèdre ABCD est donc égal à: $27 = V_{ABCD}$.

3. a. Montrons que les réels α et β existent bien:

Les réels α et β sont tels que: $\overrightarrow{BH} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC} + \beta \cdot \overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{BH} = \alpha . \overrightarrow{BC} + \beta . \overrightarrow{BD} \iff \begin{pmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \\ z_H - z_B \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \\ z_C - z_B \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \\ z_D - z_B \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 5-6 \\ 0-1 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta . \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\beta \\ -3\alpha + 3\beta \\ -6\alpha - 6\beta \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -6\beta = -1 \\ -3\alpha + 3\beta = -1 \\ -6\alpha - 6\beta = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{6} \\ -3\alpha = -\dfrac{3}{2} \\ -6\alpha - 6\beta = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{6} \\ \alpha = \dfrac{1}{2} \\ -6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right) - 6 \times \left(\dfrac{1}{6}\right) = -4 \quad \text{YES !} \end{cases}$$

D'où: $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{6}$.

Et donc: les points B, C, D et H sont coplanaires.

3. b. Montrons que H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD):

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas proportionnels et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.

Les points B, C et D ne sont donc pas alignés et définissent le plan (BCD).

Ici, le point H a pour coordonnées (5 ; 0 ; 1).

Le point H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) ssi:

- $H \in (BCD)$
- $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ et à $\overrightarrow{BD}$.

- $H \in (BCD)$ car $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{6} \overrightarrow{BD}$ (question précédente).

- Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux car: $(2 \times 0) + (2 \times (-3)) + ((-1) \times (-6)) = 0$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux car: $(2 \times (-6)) + (2 \times 3) + ((-1) \times (-6)) = 0$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est bien orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

Au total: H est bien le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

3. c. Déduisons-en la distance du point A au plan (BCD):

La distance du point A au plan (BCD) est: $AH = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$.

La distance du point A au plan (BCD) est donc égale à: 3.

4. Déduisons-en l'aire du triangle BCD:

Nous avons: $V_{ABCD} = \frac{1}{3} [\mathcal{A}(BCD) \times AH]$.

D'où: $\mathcal{A}(BCD) = \frac{3 \times V_{ABCD}}{AH}$.

L'aire du triangle BCD est donc: $\mathcal{A}(BCD) = \frac{3 \times 27}{3} = 27$ unités d'aire.