www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

CENTRES ÉTRANGERS 1

2022

$f(x) = x \ln(x) + 1$

CORRECTION

1. Déterminons les limites de f en 0^+ et en $+\infty$:

Ici: • $f(x) = x \ln(x) + 1$ $\quad (U \times V + W)$

• $\mathcal{D}f =]0; +\infty[$.

a. Limite de la fonction f en 0^+:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) + 1.$$

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 + 1 = 1$.

b. Limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \ln(x) + 1.$$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} 1 = 1.$

Dans ces conditions: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \times (+\infty) + 1 = +\infty.$

2. a. Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 1 + \ln(x)$:

La fonction $f(x) = x\ln(x) + 1$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = (1 \times \ln(x)) + \left(x \times \frac{1}{x}\right) + 0$

$(U' \times V + U \times V' + W')$

$= 1 + \ln(x).$

Ainsi, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = 1 + \ln(x).$

2. b. Déduisons-en le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$:

• Étudions le signe de f' sur $]0;+\infty[$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in]0;+\infty[$.

1er cas: $f'(x) \leqslant 0.$

$f'(x) \leqslant 0 \iff 1 + \ln(x) \leqslant 0 \iff \ln(x) \leqslant -1 \iff x \leqslant e^{-1}$

cad $x \leqslant \frac{1}{e}$ ou $x \in \left]0 ; \frac{1}{e}\right]$.

2^e^ cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff 1 + \ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant e^{-1}$

cad $x \geqslant \frac{1}{e}$ ou $x \in \left[\frac{1}{e} ; +\infty\right[$.

Au total: • f est décroissante sur $\left]0 ; \frac{1}{e}\right]$,

• f est croissante sur $[\, 0 ; +\infty\, [$.

• **Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $]\, 0 ; +\infty\, [$:**

Le tableau de variations de la fonction f sur $]\, 0 ; +\infty\, [$ est:

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	‖ a	↘	b	↗	1	↗	c

Avec: • $a = 1$

• $b = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} + 1$

• $c = +\infty$.

Notons que : le point $A\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}+1\right)$ correspond à l'extremum de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. C'est un minimum global.

2. c. Justifions que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) \in]0; 1[$:

Comme pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = x\ln(x) + 1$: $f(1) = 1$.

D'après le tableau de variations:

- si $x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[$, $f(x) \in \left]1 - \frac{1}{e}; 1\right[$,
- si $x \in \left]\frac{1}{e}; 1\right[$, $f(x) \in \left]1 - \frac{1}{e}; 1\right[$.

Ainsi, pour tout $x \in]0; 1[$: $f(x) \in \left]1 - \frac{1}{e}; 1\right[$

cad $1 - \frac{1}{e} < f(x) < 1$

cad $0 < f(x) < 1$ ou $f(x) \in]0; 1[$.

3. a. Déterminons une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point $B(1; f(1))$:

L'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point $B(1; f(1))$ s'écrit:

$$y = f'(x_B) \times (x - x_B) + f(x_B)$$

cad: $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$.

Or ici:
- $f(x) = x\ln(x) + 1$,
- $f'(x) = 1 + \ln(x)$,
- $f(1) = 1$,
- $f'(1) = 1$.

Dans ces conditions: $y = 1 \times (x - 1) + 1$

cad: $y = x$.

L'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point B est donc: $y = x$.

3. b. Étudions la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$:

D'après le cours:
- f est concave sur $]0; +\infty[$ ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$
- f est convexe sur $]0; +\infty[$ ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Or ici, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$. $(f'(x) = 1 + \ln(x))$

Ainsi: f est strictement convexe sur $]0; +\infty[$.

3. c. Déduisons que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) \geqslant x$:

Comme f est strictement convexe sur $]0; +\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

Donc, en particulier, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente (T) d'équation $y = x$.

Ainsi pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f(x) \geqslant x$.

4. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$:

Ici:
- $U_{n+1} = f(U_n)$ cad $U_{n+1} = U_n \ln(U_n) + 1$
- $U_0 \in]0; 1[$
- $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 < U_n < 1$. "

Initialisation: $0 < U_0 < 1$?

Oui car d'après l'énoncé: $U_0 \in]0; 1[\iff 0 < U_0 < 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 < U_n < 1$ et montrons qu'alors $0 < U_{n+1} < 1$.

Supposons: $0 < U_n < 1$ pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'après la question **2. c.**: **pour tout $x \in]0; 1[$, $0 < f(x) < 1$.**

Ainsi: $(1) \Rightarrow 0 < U_n < 1 \Rightarrow U_n \in]0; 1[\Rightarrow 0 < f(U_n) < 1 \Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$.

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $0 < U_n < 1$.**

4. b. Déduisons-en de la question 3. c. la croissance de la suite (U_n):

D'après la question **3. c.**: **pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) \geqslant x$.**

Ainsi pour tout entier naturel n: $f(U_n) \geqslant U_n$ cad $U_{n+1} \geqslant U_n$.

Au total, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geqslant U_n$: la suite (U_n) est croissante.

4. c. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Or ici: • (U_n) est strictement majorée par $M = 1$ $(0 < U_n < 1)$

• (U_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

Donc: Oui, la suite (U_n) est convergente.