www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

CENTRES ÉTRANGERS 1

2022

$h(x) = e^x - x$

CORRECTION

PARTIE A

1. Déterminons les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$:

Ici: • $h(x) = e^x - x$ $(e^u + V)$

• $\mathcal{D}h = \mathbb{R}$.

a. Limite de la fonction h en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x - x.$$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

• $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$.

Dans ces conditions: $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0 + (+\infty) = +\infty$.

b. Limite de la fonction h en $+\infty$:

En $+\infty$, la fonction h peut s'écrire: $h(x) = x \times \left(\dfrac{e^x}{x} - 1 \right)$. $(x \neq 0)$

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \times \left(\dfrac{e^x}{x} - 1 \right)$.

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (Croissances Comparées)

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty \times (+\infty - 1) = +\infty$.

2. a. Étudions les variations de h sur IR:

• Calculons h':

La fonction $h(x) = e^x - x$ est dérivable sur IR.

Ainsi, nous pouvons calculer h' pour tout $x \in$ IR.

Pour tout $x \in$ IR: $h'(x) = e^x - 1$ ($U' e^U + V'$).

Ainsi, pour tout $x \in$ IR: $h'(x) = e^x - 1$.

• Étudions le signe de h' sur IR:

Distinguons deux cas pour tout $x \in$ IR.

1er cas: $h'(x) \leqslant 0$.

$h'(x) \leqslant 0$ <=> $e^x - 1 \leqslant 0$ <=> $e^x \leqslant 1$ <=> $x \leqslant \ln(1)$

cad $x \leqslant 0$ ou $x \in]-\infty; 0]$.

2e cas: $h'(x) \geqslant 0$.

$h'(x) \geqslant 0 \iff e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant \ln(1)$

cad $x \geqslant 0$ ou $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Au total: • h est décroissante sur $]-\infty\,;0\,]$,

• h est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

2. b. Dressons son tableau de variations:

Le tableau de variations de la fonction h sur IR est:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h	a	↘	b	↗	c

Avec: • $a = +\infty$

• $b = h(0) = 1$

• $c = +\infty$.

3. Déduisons-en l'implication demandée:

Il s'agit ici de montrer que pour tous réels " a " et " b ":

$$0 \leqslant a \leqslant b \implies h(a) - h(b) \leqslant 0.$$

Nous savons, d'après la question précédente, que: h est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Comme par hypothèse: $0 \leqslant a \leqslant b$, nous sommes donc dans $[0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow h(0) \leqslant h(a) \leqslant h(b)$

$\Rightarrow 1 \leqslant h(a) \leqslant h(b)$

cad: $0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow h(a) - h(b) \leqslant 0$.

Ainsi, pour tous réels " a " et " b ", nous avons bien:

$0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow h(a) - h(b) \leqslant 0$.

PARTIE B

1. Déterminons une équation de la tangente T à $\mathscr{C}f$ au point A $(0; f(0))$:

L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}f$ au point A $(0; f(0))$ s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

cad: $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$.

Or ici: • $f(x) = e^x$, pour tout $x \in IR$,

• $f'(x) = e^x$, pour tout $x \in IR$,

• $f(0) = e^0 = 1$,

• $f'(0) = e^0 = 1$.

Dans ces conditions: $y = 1 \times (x - 0) + 1$

cad: $y = x + 1$.

L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A est donc: $y = x + 1$.

2. Déterminons la limite de la suite (U_n):

Ici: • $U_n = e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1$

• $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1$$

$$= \left(\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}} \right) - \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \right) - 1.$$

Or d'après le cours: • $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} e^0 = 1$

• $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1 - 0 - 1 = 0$.

3. a. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} - U_n = \left(e^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} - \frac{1}{(n+1)} - 1 \right) - \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1 \right)$

$$= \left[e^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} - \frac{1}{(n+1)} \right] - \left[e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} \right]$$

$$= h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right).$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons bien:

$$U_{n+1} - U_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. b. Déduisons-en le sens de variation de la suite (U_n):

D'après Partie A, 3., nous savons que: $0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow h(a) - h(b) \leqslant 0.$

Or ici pour tout entier naturel non nul n: $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$

Nous pouvons donc écrire, pour tout entier naturel non nul n:

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0.$$

Ainsi comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n < 0$: la suite (U_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

4. Donnons la plus petite valeur de l'entier naturel n:

D'après le tableau: $U_8 \approx 0,008\,148\,453.$

Ainsi, la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ est inférieur à 10^{-2} est: $n = 8.$