www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

CENTRES ÉTRANGERS 1

2022

LE VOLUME DU TÉTRAÈDRE ABCD

CORRECTION

1. a. a_1. Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

Nous savons que : $A(2;0;3)$, $B(0;2;1)$ et $C(-1;-1;2)$.

Dans ces conditions : • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-0 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -1-0 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous avons : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. a. a_2. Déduisons-en que les points A, B et C ne sont pas alignés :

Les points A, B et C ne sont pas alignés ssi **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires**.

Or ici : $x_{\overrightarrow{AB}} = \frac{2}{3} \times x_{\overrightarrow{AC}}$ et $y_{\overrightarrow{AB}} \neq \frac{2}{3} \times y_{\overrightarrow{AC}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires, et par conséquent:

- les points A, B et C ne sont pas alignés,
- les points A, B et C définissent ainsi le plan (ABC).

1. b. Calculons les longueurs AB et AC:

Les longueurs AB et AC sont:

- $AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3}$
- $AC = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$.

Les longueurs AB et AC sont donc respectivement: $AB = 2\sqrt{3}$ et $AC = \sqrt{11}$.

1. c. c₁. Déterminons la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$:

L'angle $\widehat{BAC}$ noté α est tel que: $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$ (cours)

$$\iff \cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{11}}$$

$$\iff \cos(\alpha) = \frac{6}{2\sqrt{3} \times \sqrt{11}}$$

cad $\cos(\alpha) = \dfrac{3}{\sqrt{33}}$.

La valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ est donc égale à: $\dfrac{3}{\sqrt{33}}$.

1\. c. c_2. Donnons une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$:

Nous savons que: $\cos(\alpha) = \dfrac{3}{\sqrt{33}}$.

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $\alpha \approx 58,5°$, aux dixième près.

2\. a. Déterminons une équation du plan P passant par C et perpendiculaire à la droite (AB):

Soit **M**, le point de coordonnées $(x; y; z)$.

Le plan P passe par le point C (- 1; - 1; 2) et est perpendiculaire à la droite (AB)

ssi: $\overrightarrow{CM} . \overrightarrow{AB} = 0$.

Or: • $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} x_M - (-1) \\ y_M - (-1) \\ z_M - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 1 \\ z - 2 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi: $\overrightarrow{CM} . \overrightarrow{AB} = 0 \iff (x + 1) \times (-2) + (y + 1) \times (2) + (z - 2) \times (-2) = 0$

$\iff -2x - 2 + 2y + 2 - 2z + 4 = 0$

cad $-2x + 2y - 2z + 4 = 0$.

L'équation cartésienne du plan P est donc: $-x + y - z + 2 = 0$.

2\. b. Donnons une représentation paramétrique de la droite (AB):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A\ (x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}\ (a\,;b\,;c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = z_A + t.c \end{cases}$$

Ici: • la droite (AB) passe par le point $A\ (2\,;0\,;3)$,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (AB) est: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (AB) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}\ (-2\,;2\,;-2)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 0 + 2t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

2. c. Déduisons-en les coordonnées du point E:

Le point **E** est le projeté orthogonal du point **C** sur la droite **(AB)** **et** est donc le point d'intersection entre la droite **(AB)** et le plan **P**.

Les coordonnées du point **E** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_E = 2 - 2t & (1) \\ y_E = 2t & (2) \\ z_E = 3 - 2t & (3) \\ -x_E + y_E - z_E + 2 = 0 & (4) \end{cases}.$$

A l'aide des équations **(1)**, **(2)** et **(3)**, nous pouvons écrire:

$$(4) \iff -x_E + y_E - z_E + 2 = 0 \iff -(2 - 2t) + 2t - (3 - 2t) + 2 = 0$$

$$\iff 6t - 3 = 0$$

cad $t = \frac{1}{2}$.

Les coordonnées du point E sont donc:

- $x_E = 2 - 2 \times \frac{1}{2} = 1$
- $y_E = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.
- $z_E = 3 - 2 \times \frac{1}{2} = 2$

2. d. Calculons l'aire du triangle ABC:

Nous avons: • $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $BC = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{11}$.

Comme $AC = BC = \sqrt{11}$, le triangle ABC est **isocèle en C**.

Dans le triangle isocèle (ABC), **[CE] est la hauteur relative à la base [AB]**.

Or: • $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \\ z_E - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 1 - (-1) \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $CE = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (0)^2} = 2\sqrt{2}$.

L'aire du triangle ABC est donc égale à: $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AB \times CE}{2}$.

Dans ces conditions, l'aire du triangle ABC est égale à:

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2\sqrt{6}.$$

3. a. Montrons que les points A, B, C et F sont coplanaires:

Nous savons que: $A(2; 0; 3)$, $B(0; 2; 1)$, $C(-1; -1; 2)$ et $F(1; -1; 3)$.

Les points A, B, C et F sont **coplanaires** ssi il existe deux réels **a** et **b** tels que:

$$\overrightarrow{AF} = a \,.\, \overrightarrow{AB} + b \,.\, \overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{AF} = a \,.\, \overrightarrow{AB} + b \,.\, \overrightarrow{AC} \iff \begin{pmatrix} x_F - 2 \\ y_F - 0 \\ z_F - 3 \end{pmatrix} = a \,.\, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + b \,.\, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 \\ -1-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ 2a \\ -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3b \\ -b \\ -b \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-3b \\ 2a-b \\ -2a-b \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a+3b=1 \\ 2a-b=-1 \\ 2a+b=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a+3b=1 \\ 2a+2a=-1 \\ b=-2a \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{3} \times \left(1-2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)\right) \\ a=-\frac{1}{4} \\ b=-2a \end{cases}$$

cad $\begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Comme il existe bien deux réels a et b $\left(a=-\frac{1}{4} \text{ et } b=\frac{1}{2}\right)$: les points A, B, C et F sont coplanaires.

3. b. Vérifions que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC):

La droite (FD) est orthogonale au plan (ABC) ssi le vecteur $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ du plan (ABC).

Or: $\begin{cases}\overrightarrow{FD} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{FD}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0\\ \overrightarrow{FD} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{FD}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0.\end{cases}$

Nous avons:
- $\overrightarrow{FD}\,.\,\overrightarrow{AB} = (2 \times (-2)) + (-2 \times 2) + (-4 \times (-2)) = 0$
- $\overrightarrow{FD}\,.\,\overrightarrow{AC} = (2 \times (-3)) + (-2 \times (-1)) + (-4 \times (-1)) = 0.$

Comme $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$: **la droite (FD) est donc bien orthogonale au plan (ABC).**

3. c. Calculons le volume du tétraèdre ABCD:

Le tétraèdre ABCD a pour **hauteur** [FD] et pour **base le triangle isocèle (ABC)**.

Nous savons que le volume du tétraèdre ABCD est donné par:

$$\frac{(\text{Aire base triangle }(ABC)) \times (\text{Hauteur tétraèdre }ABCD)}{3}$$

$$= \frac{(\text{Aire base triangle }(ABC)) \times FD}{3}$$

$$= \frac{\mathcal{A}(ABC) \times FD}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{6} \times \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-4)^2}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6}}{3}$$

$= 8$ unités de volume.

Le volume du tétraèdre ABCD est donc égal à : 8 unités de volume.