

www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ
EXERCICE 2



ASIE 2022

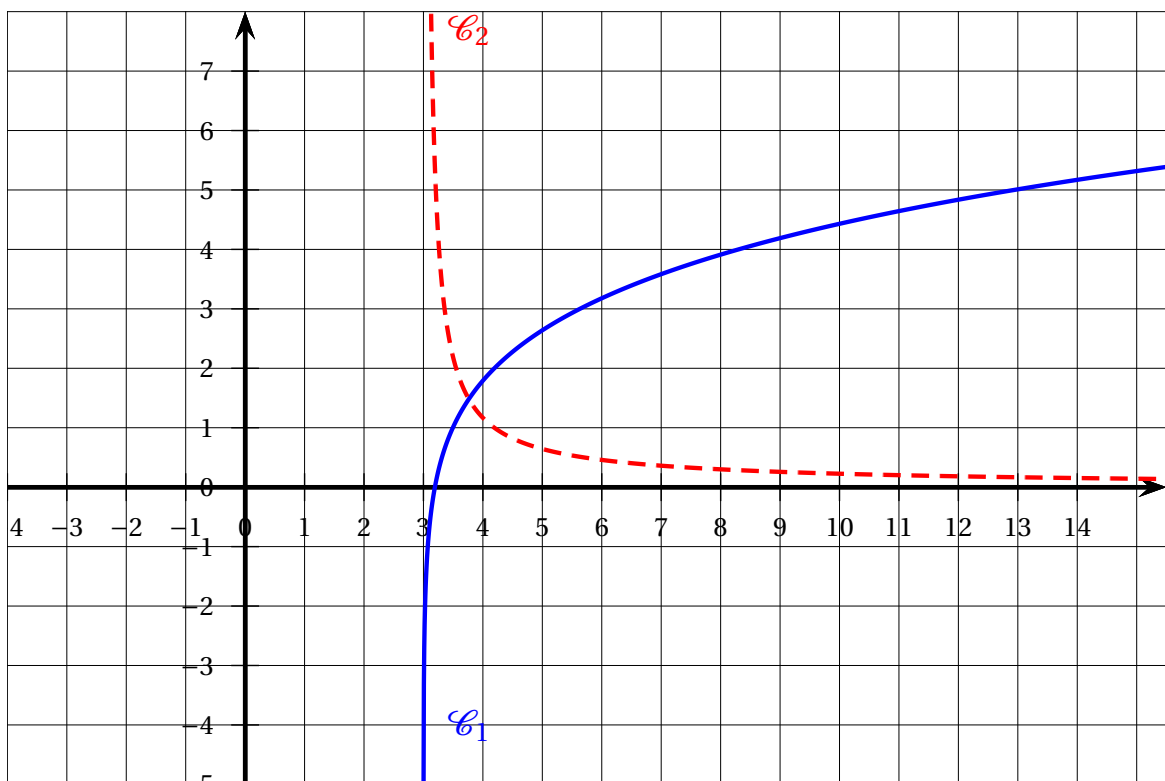
$$f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Associons à chaque courbe la fonction qu'elle représente:

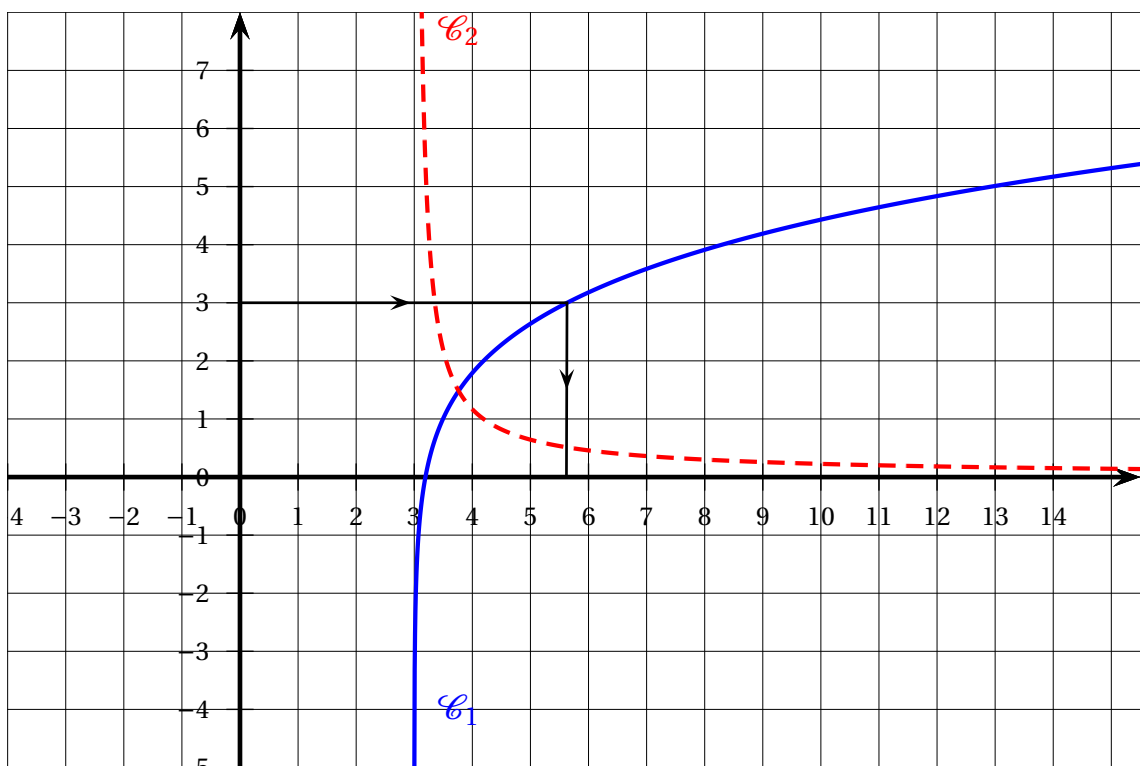
Sur le graphique et sur l'intervalle $]3; +\infty[$, sont représentées les courbes représentatives de la fonction f et de sa dérivée f' .



- Nous pouvons affirmer que:
- \mathcal{C}_1 représente la courbe représentative de la fonction f ,
 - \mathcal{C}_2 représente la courbe représentative de la dérivée f' de f .

2. Déterminons graphiquement la solution de l'équation $f(x) = 3$:

Graphiquement (partie noire avec flèches), l'équation $f(x) = 3$ admet une seule solution: $x \approx 5,7$.



Graphiquement, la solution de l'équation $f(x) = 3$ est: $x \approx 5,7$.

3. Indiquons, par lecture graphique, la convexité de la fonction f :

D'après le graphique, il est clair que: la courbe \mathcal{C}_f est concave par rapport à l'origine.

Ainsi: f est concave sur $]3; +\infty[$.

PARTIE B

1. Montrons que la fonction f est bien définie sur $I =]3; +\infty[$:

Ici: • $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ ($\ln(U)$)

• $\mathcal{D}f = ?$

L'ensemble de définition de f est tel que: $x^2 - x - 6 > 0$.

Soit l'équation: $x^2 - x - 6 = 0$. ($ax^2 + bx + c = 0$)

Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1 \times (-6)) = 25 > 0.$$

Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes:

$$\bullet x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$$

$$\bullet x_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Ainsi: $x^2 - x - 6 > 0$ ssi $x \in]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[= \mathcal{D}f$.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que: la fonction f est bien définie sur $I =]3; +\infty[$.

2. a. Calculons les limites de f en " 3 " et " $+\infty$ ":

a1. Limite de la fonction f en " 3 ":

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - x - 6)$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X), \text{ en posant } X = x^2 - x - 6.$$

Or d'après le cours: $\bullet \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty.$

Dans ces conditions: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty.$

a2. Limite de la fonction f en $+\infty$:

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = \ln\left(x^2 \left[1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right]\right)$

$$= \ln(x^2) + \ln\left[1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right] \quad (x \neq 0).$$

D'où: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left[1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right].$

Or d'après le cours: $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{6}{x^2} = 0.$$

Dans ces conditions: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \ln[1 + 0 + 0] = +\infty.$

b. Déduisons-en une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I :

Comme $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$, la courbe représentative de f sur I admet

une asymptote verticale d'équation $x = 3$.

3. a. Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in I$:

La fonction $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ est dérivable sur I comme composée de deux fonctions dérivables sur $I =]3; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]3; +\infty[$.

$$\text{Pour tout } x \in]3; +\infty[: f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6} \quad \left(\frac{u'}{u} \right).$$

La dérivée de la fonction f pour tout $x \in I$ est donc: $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$.

3. b. b1. Étudions le sens de variation de f sur I :

Distinguons deux cas pour tout $x \in I$, sachant que le signe de f' dépend uniquement du signe de $2x-1$ car $x^2-x-6 > 0$.

1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \leq 0 \text{ cad } x \leq \frac{1}{2}.$$

Or nous sommes dans $I =]3; +\infty[$.

Donc ce cas est à rejeter.

2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \text{ cad } x \geq \frac{1}{2} \text{ ou } x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right).$$

Comme $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$ est inclus dans I : la fonction f est strictement

croissante sur $I =]3; +\infty[$.

3. b. b2. Dressons le tableau de variations de la fonction f sur I :

Le tableau de variations de la fonction f sur I est:

| | | |
|------|-----------|-----------|
| x | 3 | $+\infty$ |
| f' | | + |
| f | $-\infty$ | $+\infty$ |

4. a. Justifions que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur $]5; 6[$:

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I .

Ici: • f est continue sur $]3; +\infty[$, donc sur $]5; 6[$

• " $k = 3$ " est compris entre: $f(5) = \ln(14) < 3$

et: $f(6) = \ln(24) > 3$

• f est strictement croissante sur $]5; 6[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 3$ ($k = 3$) admet bien une unique solution α appartenant à $]5; 6[$.

4. b. A l'aide d'une calculatrice, déterminons un encadrement de α :

A l'aide d'une calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près est:

$$5,63 < \alpha < 5,64.$$

5. a. Calculons $f''(x)$ sur $I =]3; +\infty[$:

Ici: $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6} \quad \left(\frac{U}{V} \right)$

$I =]3; +\infty[$.

La fonction $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$ est dérivable sur I comme quotient de deux

fonctions dérivables sur I , avec $x^2-x-6 \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Ainsi, nous pouvons calculer f'' pour tout $x \in I$.

Pour tout $x \in I$: $f''(x) = \frac{(2) \times (x^2-x-6) - (2x-1) \times (2x-1)}{(x^2-x-6)^2}$

$$\left(\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2} \right)$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 12 - (2x-1)^2}{(x^2-x-6)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 12 - (4x^2 + 1 - 4x)}{(x^2-x-6)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2-x-6)^2}.$$

La dérivée seconde de f sur I est: $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.

5. b. Étudions la convexité de f sur I :

D'après le cours: • f est concave sur I ssi $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

• f est convexe sur I ssi $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Ici: $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$ pour tout $x \in I$.

Notons que le signe de f'' dépend uniquement du signe de $-2x^2 + 2x - 13$
car $(x^2 - x - 6)^2 > 0$ sur I .

Soit l'équation: $-2x^2 + 2x - 13 = 0$. ($ax^2 + bx + c = 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 4 - 4 \times (-2) \times (-13)$$

$$= -100 < 0.$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune racine dans I .

Dans ces conditions: $-2x^2 + 2x - 13 < 0$ car $a = -2 < 0$.

Au total, comme $-2x^2 + 2x - 13 < 0$, $f''(x) < 0$ et par conséquent: la fonction f est strictement concave sur I .