BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

ASIE

2022

LA PYRAMIDE KABCD

CORRECTION

1. a. Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$:

Nous savons que: $A(-3;1;3)$, $B(2;2;3)$, $C(1;7;-1)$ et $D(-4;6;-1)$.

Dans ces conditions: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(-3) \\ 2-1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1-(-4) \\ 7-6 \\ -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4-(-3) \\ 6-1 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Ainsi: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. $\left[\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right]$

1. b. Montrons que le quadrilatère ABCD est un rectangle:

Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: ABCD est un parallélogramme.

De plus: • les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux
car $(5 \times (-1)) + (1 \times 5) + (0 \times (-4)) = 0$

• les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux
car $(5 \times (-1)) + (1 \times 5) + (0 \times (-4)) = 0$.

Le parallélogramme ABCD ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires, nous pouvons affirmer que: le quadrilatère ABCD est un rectangle.

1. c. Calculons l'aire du rectangle ABCD:

L'aire du rectangle ABCD = Longueur x Largeur

$$= AB \,.\, AD.$$

Or: • $AB = \sqrt{5^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{26}$

• $AD = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{42}$.

D'où l'aire du rectangle ABCD est égale à:

$$\mathcal{A}\,(ABCD) = \sqrt{26} \times \sqrt{42} = 2 \times \sqrt{273} \text{ unités d'aire.}$$

2. a. Justifions que les points A, B et D définissent un plan:

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont pour coordonnées: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Notons que: $x_{\overrightarrow{AB}} = (-5) \times x_{\overrightarrow{AD}}$ et $y_{\overrightarrow{AB}} \neq (-5) \times y_{\overrightarrow{AD}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

Les points A, B et D ne sont donc pas alignés: ils définissent ainsi le plan (ABD).

2. b. Montrons que $\vec{n}$ (-2 ; 10 ; 13) est un vecteur normal au plan (ABD):

Le vecteur $\vec{n}$ (-2 ; 10 ; 13) est normal au plan (ABD) ssi ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ du plan (ABD).

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AD} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0. \end{cases}$

Nous avons:
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = ((-2) \times 5) + (10 \times 1) + (13 \times 0) = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = ((-2) \times (-1)) + (10 \times 5) + (13 \times (-4)) = 0.$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AD}$: le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABD).

2. c. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (ABD):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A (x_A ; y_A ; z_A) et un vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) s'écrit:

$$a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$

- le point $A \in (ABD)$, avec $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $(-2) \times (x - (-3)) + 10 \times (y - 1) + 13 \times (z - 3) = 0$

cad $-2x + 10y + 13z - 55 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (ABD) est donc:

$-2x + 10y + 13z - 55 = 0$.

3. a. Donnons une représentation paramétrique de la droite Δ:

La droite Δ passe par le point K et est orthogonale au plan (ABD).

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite Δ passe par le point $K(-3; 14; 14)$,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point K et de vecteur directeur $\vec{u}$ (-2 ; 10 ; 13) s'écrit:

$$\begin{cases} x = -3 + (-2) \times t \\ y = 14 + 10 \times t \\ z = 14 + 13 \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc:

$$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 14 + 10t \\ z = 14 + 13t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. b. Déterminons les coordonnées du point I:

Le point I est le projeté orthogonal de K sur le plan (ABD).

Les coordonnées du point I vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_I = -3 - 2t & (1) \\ y_I = 14 + 10t & (2) \\ z_I = 14 + 13t & (3) \\ -2x_I + 10y_I + 13z_I - 55 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

(4) $\iff$ $-2x_I + 10y_I + 13z_I - 55 = 0$

$\Longleftrightarrow$ $-2 \times (-3-2t) + 10 \times (14+10t) + 13 \times (14+13t) - 55 = 0$

$\Longleftrightarrow$ $273t + 273 = 0$

cad $t = -1$.

Les coordonnées du point I sont donc:
- $x_I = -3 - 2 \times (-1) = -1$
- $y_I = 14 + 10 \times (-1) = 4$.
- $z_I = 14 + 13 \times (-1) = 1$

3. c. Montrons que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$:

La hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K correspond à [KI].

Or: $\overrightarrow{KI} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix}$ et $KI = \sqrt{2^2 + (-10)^2 + (-13)^2} = \sqrt{273}$.

La hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut donc bien: $\sqrt{273}$.

4. Calculons le volume de la pyramide KABCD:

Nous savons que: volume d'une pyramide $= \dfrac{1}{3} \times b \times h$.

(b = aire d'une base, h = hauteur à cette base)

La pyramide de KABCD a:
- pour **hauteur** [KI]
- pour **base le rectangle ABCD**.

Or: • $KJ = \sqrt{273}$ $(= h)$

• $\mathcal{A}(ABCD) = 2 \times \sqrt{273}$ $(= b)$.

Dans ces conditions, le volume de la pyramide KABCD est:

$$V_{KABCD} = \frac{1}{3} \times 2 \times \sqrt{273} \times \sqrt{273} .$$

Le volume de la pyramide KABCD est donc égal à: 182 unités de volume.