www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

ASIE
2022

$f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$

CORRECTION

PARTIE A

1. Déterminons graphiquement $f(1)$ et $f'(1)$:

Ici: • A (1; 3) et B (3; 5)

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

Graphiquement, nous trouvons: $f(1) = 3$.

Quant à $f'(1)$: $f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ cad $f'(1) = \dfrac{5 - 3}{3 - 1} = 1$.

Ainsi: $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$.

2. a. Déterminons l'expression de $f'(x)$:

Ici: • $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, $a > 0$ et $b > 0$ ($\ln(U) + V$)

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

D'après l'énoncé f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in IR$: $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1} + 0$ $\left(\frac{u'}{u} + v'\right)$

$$= \frac{2ax}{ax^2 + 1}.$$

Ainsi, pour tout $x \in IR$: $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1}$.

2. b. Déterminons les valeurs de a et b :

D'après les questions précédentes, nous savons que :

$$\begin{cases} \bullet\ f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b \\ \bullet\ f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1} \\ \bullet\ f(1) = 3 \\ \bullet\ f'(1) = 1 \end{cases}$$

D'où, nous pouvons poser le système suivant :

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(a + 1) + b = 3 \\ \frac{2a}{a + 1} = 1 \end{cases} \quad (\text{car : } x = 1)$$

$$\iff \begin{cases} b = 3 - \ln(a + 1) \\ 2a = a + 1 \end{cases}$$

$$\text{cad} \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - \ln(2). \end{cases}$$

Au total: • $a = 1$ et $b = 3 - \ln(2)$

• $f(x) = \ln(x^2 + 1) + (3 - \ln(2))$, pour tout $x \in IR$.

PARTIE B

1. Montrons que f est une fonction paire:

Ici: • $f(x) = \ln(x^2 + 1) + (3 - \ln(2))$, pour tout $x \in IR$ ($\ln(U) + V$)

• $x \in IR$ et $-x \in IR$.

Nous avons: $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) + (3 - \ln(2))$

$= \ln(x^2 + 1) + (3 - \ln(2))$

$= f(x)$.

Comme $f(-x) = f(x)$: f est une fonction paire.

2. a. Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire:

$$f(x) = \ln\left(x^2\left[1 + \frac{1}{x^2}\right]\right) + (3 - \ln(2)). \quad (x \neq 0)$$

D'où: $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2) + \ln\left[1 + \frac{1}{x^2}\right] + (3 - \ln(2))$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2\ln(x) + \lim_{x \to +\infty} \ln\left[1 + \frac{1}{x^2}\right] + \lim_{x \to +\infty} (3 - \ln(2)).$$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

• $\lim_{x \to +\infty} (3 - \ln(2)) = 3 - \ln(2)$.

Dans ces conditions: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \times (+\infty) + \ln[1 + 0] + 3 - \ln(2) = +\infty$.

2. b. Déterminons la limite de la fonction f en $-\infty$:

Comme f est une fonction paire: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

$= +\infty$.

3. a. Calculons $f'(x)$:

D'après l'énoncé f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + 0$ $\left(\frac{u'}{u} + v' \right)$

$= \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

3. b. Étudions le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in \mathbb{R}$, **sachant que $x^2 + 1 > 0$.**

1er cas : $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff 2x \leqslant 0$ cad $x \leqslant 0$ ou $x \in]-\infty; 0]$.

2e cas : $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff 2x \geqslant 0$ cad $x \geqslant 0$ ou $x \in [0; +\infty[$.

Ainsi : • f est décroissante sur $]-\infty; 0]$,

• f est croissante sur $[0; +\infty[$.

3. c. Dressons le tableau de variations de f sur IR :

Le tableau de variations de la fonction f sur IR est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	a	↘	b	↗	c

Avec : • $a = +\infty$

• $b = f(0) = 3 - \ln(2)$ (minimum de f sur IR)

• $c = +\infty$.

4. Donnons les valeurs du réel k telles que $f(x) = k$ admet 2 solutions :

D'après le tableau de variations, $f(x) = k$ admet deux solutions ssi :

$$k > 3 - \ln(2).$$

5. Résolvons l'équation $f(x) = 3 + \ln(2)$:

$$f(x) = 3 + \ln(2) \iff \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = 3 + \ln(2)$$

$$\iff \ln(x^2 + 1) = 2\ln(2)$$

$$\iff \ln(x^2 + 1) = \ln(4)$$

$$\iff x^2 + 1 = 4$$

cad $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.

D'où l'équation $f(x) = 3 + \ln(2)$ admet deux solutions distinctes:

$-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

PARTIE C

1. Conjecturons les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$:

D'après le graphique, les éventuels points d'inflexion semble être: les points $C(-1; f(-1))$ et $D(1; f(1))$.

2. Montrons que pour tout $x \in IR$, $f''(x) = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$:

Ici: • $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

• $\mathscr{D}f' = IR$.

La fonction $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ est dérivable sur IR comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, nous pouvons calculer f'' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = \dfrac{(2) \times (x^2 + 1) - (2x) \times (2x)}{(x^2 + 1)^2}$ $\left(\dfrac{U' \times V - U \times V'}{V^2}\right)$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

La dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$ est donc: $f''(x) = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$.

3. Déduisons-en le plus grand intervalle sur lequel f est convexe:

f est convexe sur un intervalle I ssi $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Ici: $f''(x) \geq 0 \iff 2(1 - x^2) \geq 0$ (car: $(x^2 + 1)^2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$)

$\iff 1 - x^2 \geq 0$

cad $x^2 \leq 1$ ou $x \in [-1 ; 1]$.

Donc le plus grand intervalle sur lequel f est convexe: $[-1 ; 1]$.