# BACCALAURÉAT
# MATHÉMATIQUES

## SUJET 1

## CORRIGÉ EXERCICE 3

# ASIE
## 2022

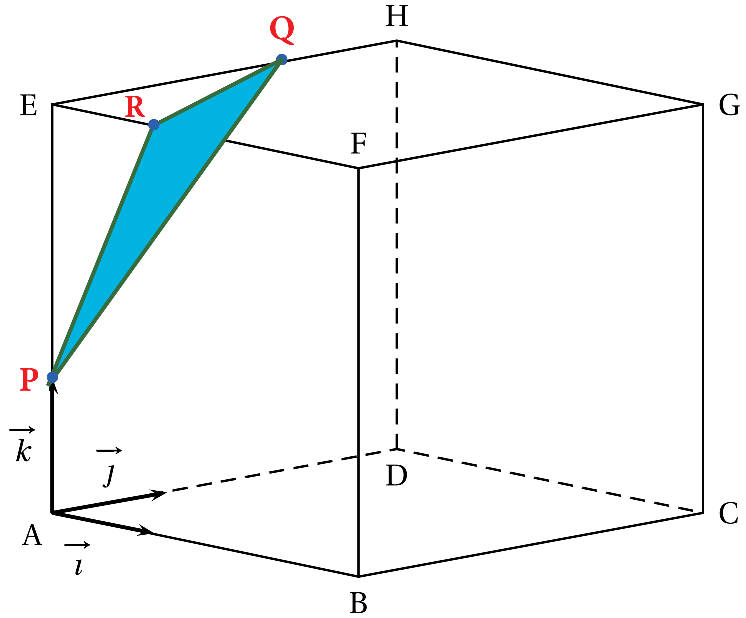
# L'AIRE DU TRIANGLE PQR

## CORRECTION

**1. Plaçons les points P, Q et R sur la figure:**

Nous savons que: $P(0;0;1)$, $Q(0;2;3)$ et $R(1;0;3)$.

D'où la figure suivante:




**2. Montrons que le triangle PQR est isocèle en R:**

Le triangle PQR est isocèle en R ssi: $PR = QR$.

Or: • $PR = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

• $QR = \sqrt{(1-0)^2 + (0-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{5}$.

Comme $PR = QR = \sqrt{5}$ : le triangle PQR est isocèle en R.

3. Justifions que les points P, Q et R définissent un plan:

Les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$ ont pour coordonnées: $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Notons que: $x_{\overrightarrow{PR}} = 1 \times x_{\overrightarrow{QR}}$ et $y_{\overrightarrow{PR}} \neq 1 \times y_{\overrightarrow{QR}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires**.

Les points P, Q et R ne sont donc pas alignés: ils définissent le plan ( PQR ).

4. a. Montrons que $\vec{u}$ ( 2 ; 1 ; -1 ) est normal au plan ( PQR ):

Le vecteur $\vec{u}$ ( 2 ; 1 ; -1 ) est normal au plan ( PQR ) ssi ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$ du plan ( PQR ).

Or : $\begin{cases} \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{PR} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{u} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \\ \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{QR} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{u} \cdot \overrightarrow{QR} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\vec{u} \cdot \overrightarrow{PR} = (2 \times 1) + (1 \times 0) + ((-1) \times 2) = 0$

• $\vec{u} \cdot \overrightarrow{QR} = (2 \times 1) + (1 \times (-2)) + ((-1) \times 0) = 0$.

Comme $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{PR}$ et à $\overrightarrow{QR}$ : le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan ( PQR ).

4. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan ( PQR ):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A ( $x_A ; y_A ; z_A$ ) et un vecteur normal $\vec{n}$ ( a ; b ; c ) s'écrit:

$$a ( x - x_A ) + b ( y - y_A ) + c ( z - z_A ) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

• le point Q ∈ ( PQR ), avec $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a ( x - x_Q ) + b ( y - y_Q ) + c ( z - z_Q ) = 0$

$\iff 2 \times ( x - 0 ) + 1 \times ( y - 2 ) + (-1) \times ( z - 3 ) = 0$

cad $2x + y - z + 1 = 0.$

Une équation cartésienne du plan ( PQR ) est donc: $2x + y - z + 1 = 0.$

4. c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (d):

La droite **(d)** passe par le point **E** et est orthogonale au plan ( PQR ).

D'après le cours, nous savons que:

• Soit A ( $x_A ; y_A ; z_A$ ) un point de l'espace.

- Soit $\vec{u}\,(a;b;c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in IR.$$

Ici: • la droite **(d)** passe par le point **E ( 0 ; 0 ; 3 )**,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite **(d)** est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite **(d)** passant par le point E et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2;1;-1)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + 2 \times t \\ y = 0 + 1 \times t \\ z = 3 + (-1) \times t \end{cases}, t \in IR.$$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in IR.$$

4. d. Montrons que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$:

Le point L est le projeté orthogonal de E sur le plan ( PQR ).

Les coordonnées du point L vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_L = 2t & (1) \\ y_L = t & (2) \\ z_L = 3 - t & (3) \\ 2x_L + y_L - z_L + 1 = 0 & (4) \end{cases}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff 2x_L + y_L - z_L + 1 = 0 \iff 2 \times (2t) + (t) - (3 - t) + 1 = 0$$

$$\iff 6t - 2 = 0$$

cad $t = \frac{1}{3}$.

Les coordonnées du point L sont donc:

- $x_L = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $y_L = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ .
- $z_L = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

4. e. Déterminons la distance entre le point E et le plan ( PQR ):

Déterminer la distance entre le point E et le plan ( PQR ), revient à calculer: **EL**.

Or: $EL = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 3\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}}$

$= \frac{\sqrt{6}}{3}$.

La distance entre le point E et le plan ( PQR ) est égale à : $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

**5. Montrons que le volume du tétraèdre EPQR est égal à $\frac{2}{3}$:**

Le tétraèdre EPQR a pour **hauteur [ PE ]** et pour **base le triangle EQR, rectangle en E**.

Nous savons que le volume du tétraèdre EPQR est donné par :

$$V_{EPQR} = \frac{(\text{ Aire base triangle rectangle EQR }) \times (\text{ Hauteur tétraèdre EPQR })}{3}.$$

Or: • **aire base triangle rectangle EQR** $= \frac{EQ \times ER}{2}$

$= \frac{2 \times 1}{2}$

$= 1$

• **hauteur du tétraèdre EPQR = PE** $= \sqrt{(0-0)^2 + (0-0)^2 + (3-1)^2}$

$= 2$.

D'où : $V_{EPQR} = \frac{1 \times 2}{3}$ cad $V_{EPQR} = \frac{2}{3}$.

6. Déduisons-en l'aire du triangle PQR:

Nous savons que: $V_{EPQR} = \frac{1}{3} \times [\mathcal{A}(EQR) \times PE] = \frac{2}{3}$.

Mais nous avons aussi: $V_{EPQR} = \frac{1}{3} \times [\mathcal{A}(PQR) \times EL]$ (1).

Or: $EL = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

D'où: (1) <=> $3 \times V_{EPQR} = \mathcal{A}(PQR) \times \frac{\sqrt{6}}{3}$

cad $\mathcal{A}(PQR) = \frac{9}{\sqrt{6}} \times V_{EPQR}$.

Ainsi l'aire du triangle PQR est égale à:

$$\mathcal{A}(PQR) = \frac{9}{\sqrt{6}} \times \frac{2}{3} = \sqrt{6} \text{ unités d'aire.}$$