BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

ANTILLES-GUYANE
2022

LE CUBE ABCDEFGH

CORRECTION

1. Précisons les coordonnées des points E, F, G et K:

Dans le repère orthonormé (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$), les coordonnées des points E, F, G et K sont:

- E (0; 0; 1) car $\overrightarrow{AE} = 0 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AE}$
- F (1; 0; 1) car $\overrightarrow{AF} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AE}$
- G (1; 1; 1) car $\overrightarrow{AG} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AE}$
- K $\left(1; \frac{1}{2}; 0 \right)$ car $\overrightarrow{AK} = 1 \times \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AD} + 0 \times \overrightarrow{AE}$.

Ainsi, les coordonnées des points E, F, G et K sont:

$$E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } K\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrons que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; -2 ; 1) est orthogonal au plan (EGK):

Nous avons: E (0; 0; 1), G (1; 1; 1) et K $\left(1; \frac{1}{2}; 0 \right)$.

Dans ces conditions, les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EK}$ ont pour coordonnées:

$$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} x_G - x_E \\ y_G - y_E \\ z_G - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix} x_K - x_E \\ y_K - y_E \\ z_K - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Notons que: $x_{\overrightarrow{EG}} = 1 \times x_{\overrightarrow{EK}}$ et $y_{\overrightarrow{EG}} \neq 1 \times y_{\overrightarrow{EK}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EK}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

Les points E, G et K ne sont donc pas alignés et définissent le plan (EGK).

Le vecteur $\vec{n}$ (2 ; -2 ; 1) est normal au plan (EGK) ssi ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EK}$ du plan (EGK).

Or : $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{EG} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{EK} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{EK} = 0. \end{cases}$

Nous avons:
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = (2 \times 1) + ((-2) \times 1) + (1 \times 0) = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EK} = (2 \times 1) + \left((-2) \times \frac{1}{2} \right) + (1 \times (-1)) = 0.$

Comme $\vec{n}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{EG}$ et à $\overrightarrow{EK}$: le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (EGK).

3. Montrons qu'une équation cartésienne du plan (EGK) est $2x - 2y + z - 1 = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A (x_A ; y_A ; z_A) et un vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) s'écrit:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

• le point E ∈ (EGK), avec $E=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x-x_E)+b(y-y_E)+c(z-z_E)=0$

$\Longleftrightarrow\ 2\times(x-0)-2\times(y-0)+1\times(z-1)=0$

cad $2x-2y+z-1=0.$

Une équation cartésienne du plan (EGK) est donc bien: $2x-2y+z-1=0.$

4. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (d):

La droite **(d)** est orthogonale au plan **(EGK)** passant par **F**.

D'après le cours, nous savons que:

• **Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.**

• **Soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) un vecteur non nul de l'espace.**

• **La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:**

$$\begin{cases}x=x_A+t.a\\y=y_A+t.b\\z=z_A+t.c\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Ici: • la droite **(d)** passe par le point **F (1 ; 0 ; 1)**,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite **(d)** est:

$$\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où une représentation paramétrique de la droite **(d)** passant par le point F et de vecteur directeur $\vec{n}$ (2 ; -2 ; 1) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \times t \\ y = 0 + (-2) \times t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 1 \times t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + t \end{cases}$$

5. **Montrons que le point L a pour coordonnées** $\left(\frac{5}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{7}{9} \right)$:

Le point **L** est le projeté orthogonal de F sur le plan (EGK).

Les coordonnées du point **L** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_L = 1 + 2t \quad (1) \\ y_L = -2t \quad (2) \\ z_L = 1 + t \quad (3) \\ 2x_L - 2y_L + z_L - 1 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff 2x_L - 2y_L + z_L - 1 = 0 \iff 2 \times (1 + 2t) - 2 \times (-2t) + (1 + t) - 1 = 0$$

$$\iff 2 + 4t + 4t + 1 + t - 1 = 0$$

$$\iff 9t + 2 = 0$$

cad $t = -\frac{2}{9}$.

Les coordonnées du point L sont donc:

- $x_L = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{5}{9}$
- $y_L = -2 \times \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$.
- $z_L = 1 + \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{7}{9}$

6. Justifions que la longueur $LF = \frac{2}{3}$:

Nous savons que: $L\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$ et $F(1; 0; 1)$.

Dans ces conditions: $LF^2 = \left(1 - \frac{5}{9}\right)^2 + \left(0 - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{7}{9}\right)^2$

$$= \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2$$

$$= \frac{1}{81} \times (16 + 16 + 4)$$

$$= \frac{36}{81}.$$

D'où: $LF = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

La longueur LF est donc bien égale à : $\frac{2}{3}$.

7. a. Calculons l'aire du triangle EFG:

L'aire du triangle rectangle EFG est égale à: $\mathcal{A}(EFG) = \frac{FE \times FG}{2}$.

Or: • $FE = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2 + (1-1)^2} = 1$

• $FG = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2} = 1$.

Dans ces conditions: $\mathcal{A}(EFG) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ unité d'aire.

7. b. Déduisons-en que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\frac{1}{6}$:

Le tétraèdre EFGK a pour **hauteur [BF]** et pour **base le triangle EFG**.

Le volume du tétraèdre EFGK est donc:

$$\frac{(\text{Aire base triangle EFG}) \times (\text{Hauteur tétraèdre EFGK})}{3}$$

$$= \frac{(\text{Aire base triangle EFG}) \times BF}{3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 1}{3} \quad \text{car } BF = 1$$

$$= \frac{1}{6}.$$

Le volume du tétraèdre EFGK et donc bien égal à : $\frac{1}{6}$.

8. Déduisons-en l'aire du triangle EGK :

Le tétraèdre EFGK a **aussi** pour hauteur **[LF]** et pour **base le triangle EGK**.

Nous savons que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$.

($\mathcal{B}$ = aire d'une base, h = hauteur relative à cette base)

Dans ces conditions : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h \iff 3 \times V = \mathcal{B} \times h$

cad $\mathcal{B} = \frac{3 \times V}{h}$.

Ici : • V = volume du tétraèdre EFGK $= \frac{1}{6}$

• $h = LF = \frac{2}{3}$.

L'aire du triangle EGK est donc : $\mathcal{B} = \frac{3 \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}$ cad $\mathcal{B} = \frac{3}{4}$.

L'aire du triangle EGK est donc : $\mathcal{A}' = \frac{3}{4}$ unité d'aire.

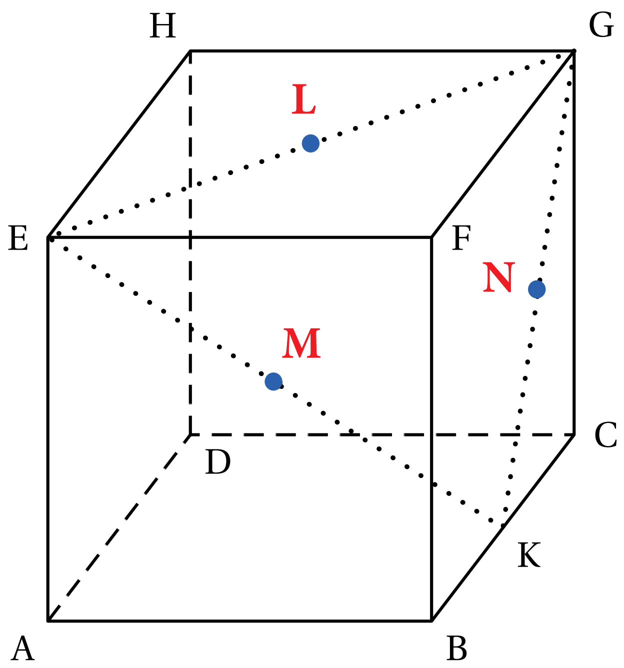
9. Déterminons le volume du tétraèdre FLMN :

• L est le milieu du segment [EG].

• M est le milieu du segment [EK].

• N est le milieu du segment [GK].

D'après **le théorème de la droite des milieux**, les côtés du triangle (LMN) ont une longueur moitié de celles du triangle (EGK).



L'aire du triangle (LMN) est donc: $\mathcal{A}'' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \mathcal{A}' = \frac{3}{16}$.

De plus, comme les points L, M et N appartiennent au plan (EGK), le triangle LMN appartient au plan (EGK).

Ainsi, la hauteur du tétraèdre FLMN est donc la même que celle du tétraèdre EFGK **cad** $LF = \frac{2}{3}$.

D'où le volume du tétraèdre FLMN et égal à: $V_{FLMN} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{24}$.