

www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ
EXERCICE 4 

ANTILLES-GUYANE
2022

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES

C

D

C

A

D

C

1. $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$ admet pour asymptote la droite d'équation...

Ici: • $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

D'après le cours: Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = p$, la courbe représentative de f

admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = p$.

Donc, pour répondre à cette question, nous allons calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = \frac{x^2 \left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}$ ($x \neq 0$)

$$= \frac{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\text{D'où: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

$$\text{Or: } \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

$$\text{Dans ces conditions: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-2 + 0 + 0}{1 + 0} = -2.$$

Donc ici la courbe représentative de f admet pour asymptote la droite d'équation: $y = -2$.

2. La primitive F de f sur \mathbb{R} qui vérifie $F(0) = 1$ est...

$$\text{Ici: } \bullet f(x) = xe^{x^2}$$

$$\bullet \mathcal{D}f = \mathbb{R}.$$

• f est définie et continue sur \mathbb{R} .

Elle admet donc une primitive sur \mathbb{R} cad une fonction F dérivable sur \mathbb{R} telle que: $F' = f$.

$$\text{Une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est: } F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien:

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{1}{2} (2x \times e^{x^2}) \\
 &= xe^{x^2} \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

- D'après le cours, toutes les primitives de f sur \mathbb{R} sont de la forme:

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Ici, nous avons donc: $G(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R}.$

Or: $G(0) = 1.$

$$G(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^0 + c = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + c = 1 \quad \text{cad} \quad c = \frac{1}{2}.$$

Au total, la primitive F de f sur \mathbb{R} demandée est: $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}.$

3. On peut affirmer que la fonction f est ...

Nous sommes en présence de la représentation graphique de la courbe de la dérivée f' de f sur \mathbb{R} .

Au vu du graphique, nous pouvons dire que:

- f' est croissante sur $]-\infty; 3]$, donc sur $[0; 2]$,
- f' est décroissante sur $[3; +\infty[$.

D'après le cours: f est convexe sur I ssi $f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$.

Or ici, f' est croissante sur $[0; 2]$ ce qui revient à dire que:

$$\text{sur } [0; 2], f''(x) \geq 0.$$

Au total, nous pouvons affirmer que: la fonction f est convexe sur $[0; 2]$.

4. Les primitives de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$ sont...

Les primitives de f sur \mathbb{R} ont donc pour dérivées: $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$.

Ainsi pour connaître le sens de variations des primitives de f , nous devons étudier le signe de f sur \mathbb{R} .

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x^2} > 0$ et donc $f(x) > 0$.

Au total, les primitives de f sur \mathbb{R} sont: toutes croissantes sur \mathbb{R} .

5. La limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{2 \ln(x)}{3x^2 + 1}$ définie sur $]0; +\infty[$ est...

Ici: • $f(x) = \frac{2 \ln(x)}{3x^2 + 1}$

• $\mathcal{D}f =]0; +\infty[$.

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = \frac{2}{3} \times \left[\frac{x^2 \times \frac{\ln(x)}{x^2}}{x^2 \times \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)} \right] \quad (x \neq 0)$

$$= \frac{2}{3} \times \left[\frac{\frac{\ln(x)}{x^2}}{1 + \frac{1}{3x^2}} \right].$$

$$\text{D'où: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} x \left[\frac{\frac{\ln(x)}{x^2}}{1 + \frac{1}{3x^2}} \right].$$

$$\text{Or : } \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \quad (\text{Croissances Comparées})$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^2} = 0.$$

$$\text{Dans ces conditions: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3} x \left[\frac{0}{1+0} \right] = 0.$$

Ainsi la limite en $+\infty$ de la fonction f est égale à: 0.

6. L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R} \dots$

Nous devons résoudre l'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ (1) dans \mathbb{R} .

Procédons à un changement de variable en posant: $X = e^x$.

Dans ces conditions: (1) $\Leftrightarrow X^2 + X - 12 = 0$. ($aX^2 + bX + c = 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4 \times 1 \times (-12)$$

$$= 49 > 0.$$

Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, l'équation (1) admet deux solutions distinctes:

$$\bullet X_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$$

$$\bullet X_2 = \frac{-1+7}{2} = 3.$$

Or: $X_1 = -4 \Leftrightarrow e^{x_1} = -4$ ce qui est impossible car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Nous retiendrons donc que la solution: $X = 3$ cad $x = \ln(3)$.

Au total, l'équation (1) admet dans \mathbb{R} : une seule solution, $x = \ln(3)$.