BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

AMÉRIQUE DU SUD
2022

$U_{n+1} = 0,2 \times U_n^2$

CORRECTION

1. a. Calculons U_1 et U_2:

Ici: • $U_{n+1} = 0,2 \times U_n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 4$.

Dans ces conditions: • $U_1 = 0,2 \times U_0^2 = 0,2 \times (4)^2 = 3,2$

• $U_2 = 0,2 \times U_1^2 = 0,2 \times (3,2)^2 = 2,048$.

Ainsi: $U_1 = 3,2$, $U_2 = 2,048$.

1. b. Recopions et complétons la fonction écrite en langage Python:

La fonction écrite en langage Python complétée est la suivante:

```
def suite_u(p) :
  u = 4
  for i in range(1,p + 1) :
      u = u*u/5
  return u
```

2. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leqslant 4$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 < U_n \leqslant 4$ ".

Initialisation: $U_0 = 4$ et $0 < 4 \leqslant 4$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 < U_n \leqslant 4$ et montrons qu'alors $0 < U_{n+1} \leqslant 4$.

Supposons: $\underbrace{0 < U_n \leqslant 4}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

D'où: $(1) \Rightarrow 0^2 < U_n^2 \leqslant 4^2$

$\Rightarrow 0 < U_n^2 \leqslant 16$

$\Rightarrow 0,2 \times 0 < 0,2 \times U_n^2 \leqslant 0,2 \times 16$

$\Rightarrow 0 < 0,2 \times U_n^2 \leqslant \dfrac{16}{5} \leqslant 4$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1} \leqslant 4$.

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $0 < U_n \leqslant 4$.**

2. b. Montrons que la suite (U_n) est décroissante:

Pour cela, nous devons déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

Nous avons: $U_{n+1} - U_n = 0,2\, U_n^2 - U_n = U_n \times (0,2\, U_n - 1)$.

Or: $0 < U_n \leqslant 4$.

D'où: $U_n > 0$ **et** $0,2\, U_n - 1 < 0$.

Ainsi, $U_{n+1} - U_n < 0$ et par conséquent: la suite (U_n) est décroissante.

2. c. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après les questions précédentes: • $U_n > 0$ (minorant $m = 0$)

• (U_n) est décroissante.

Or, d'après le cours, tout suite décroissante et minorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente.

3. a. Justifions l'égalité $\ell = 0,2 \times \ell^2$:

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet pour limite ℓ telle que:

$$\ell = 0,2 \times \ell^2. \quad (\text{ cours })$$

3. b. Déterminons alors ℓ:

$\ell = 0,2 \times \ell^2 \iff 0,2 \times \ell^2 - \ell = 0$

$$\iff \ell \times (0,2\ell - 1) = 0 \quad \text{cad} \quad \begin{cases} \ell = 0, \text{ à retenir} \\ \text{ou} \\ \ell = 5 > 4, \text{ à rejeter} \end{cases}$$

Ainsi, la suite (U_n) converge vers: $\ell = 0$.

4. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 2\,V_n - \ln(5)$:

Ici, pour tout $n \in \mathbb{N}$: • $V_n = \ln(U_n)$

• $W_n = V_n - \ln(5)$.

Dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \ln(U_n) \iff V_{n+1} = \ln(U_{n+1})$

$\iff V_{n+1} = \ln\left(\frac{U_n^2}{5}\right)$

$\iff V_{n+1} = \ln(U_n^2) - \ln(5)$

cad $V_{n+1} = 2\ln(U_n) - \ln(5)$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, nous avons bien : $V_{n+1} = 2\,V_n - \ln(5)$.

4. b. Montrons que la suite (W_n) est géométrique de raison 2 :

$W_n = V_n - \ln(5) \iff W_{n+1} = V_{n+1} - \ln(5)$

$\iff W_{n+1} = (2\,V_n - \ln(5)) - \ln(5)$. (1)

Or : $V_n = W_n + \ln(5)$.

D'où : $(1) \iff W_{n+1} = (2\,[\,W_n + \ln(5)\,] - \ln(5)) - \ln(5)$

$\iff W_{n+1} = 2 \times W_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent : (W_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 2$.

4. c. Montrons que $V_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$:

- Le premier terme W_0 de la suite (W_n) est : $W_0 = V_0 - \ln(5)$

$= \ln(U_0) - \ln(5)$

$= \ln\left(\frac{4}{5}\right)$.

• Dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire:

$$W_{n+1} = 2 \times W_n \quad \text{ou} \quad W_n = (2)^n \times W_0 \quad \text{ou} \quad W_n = (2)^n \times \ln\left(\frac{4}{5}\right).$$

Comme $V_n = W_n + \ln(5)$: $\quad V_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times (2)^n + \ln(5)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

5. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ et retrouvons $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times (2)^n + \ln(5)$$

$$= -\infty \quad \text{car} \quad \ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0 \ \text{ et } \ 2 > 1.$$

D'où: $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{V_n}$

$$= e^{-\infty} \ \text{cad} \ 0.$$

Ainsi:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0.$