BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

AMÉRIQUE DU NORD

2022

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES D C D B D C

1. $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à...

$$a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$= \ln(9) + \ln\left((3)^{\frac{1}{2}}\right) - \ln(3) - \ln(9)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(3).$$

Ainsi, le réel " a " est égal à : $-\frac{1}{2}\ln(3)$.

2. Soit l'équation (E) : $\ln(x) + \ln(x - 10) = \ln(3) + \ln(7)$...

Préalablement notons que : $x > 10$ cad $x \in]10; +\infty[$.

$\ln(x) + \ln(x - 10) = \ln(3) + \ln(7) \iff \ln(x \times (x - 10)) = \ln(3 \times 7)$

$\iff \ln(x^2 - 10x) = \ln(21)$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 10x = 21$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 10x - 21 = 0.$$

Soit l'équation: $x^2 - 10x - 21 = 0.$ $\quad (ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul du discriminant:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-10)^2 - 4 \times (1) \times (-21)$

$= 184 > 0.$

Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, **l'équation admet deux solutions distinctes**:

- $x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{184}}{2} = 5 - \sqrt{46}$
- $x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{184}}{2} = 5 + \sqrt{46}.$

Or: • $x_1 \in \,]\,10\,;+\infty\,[$, **et donc solution à rejeter**

• $x_2 \in \,]\,10\,;+\infty\,[$, **et donc solution à retenir.**

Ainsi, l'équation (E) admet une unique solution réelle.

3. **Sur $]\,0\,;+\infty\,[$, $f(x) = x^2\,(-1 + \ln(x))$ et ...**

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ au point $(\sqrt{e}\,; f(\sqrt{e}))$ s'écrit:

$$y = f'(\sqrt{e}) \times (x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e}).$$

Or ici: • $f(x) = x^2 \, (-1 + \ln(x))$, pour tout $x \in \,]0 ; +\infty[$,

• $f'(x) = [\,2x \times (-1 + \ln(x))\,] + \left[x^2 \times \left(\frac{1}{x} \right) \right]$

$= -x + 2x \ln(x)$, pour tout $x \in \,]0 ; +\infty[$,

• $f(\sqrt{e}) = -\frac{1}{2}e$,

• $f'(\sqrt{e}) = 0$.

Dans ces conditions: $y = 0 \times (x - \sqrt{e}) + \left(-\frac{1}{2} e \right)$

cad: $y = -\frac{1}{2} e$.

Ainsi, la droite d'équation $y = -\frac{1}{2} e$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

4. La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes est ...

D'après l'énoncé, le sac contient: • 20 jetons jaunes

• 30 jetons bleus.

Ici, il s'agit de calculer la probabilité d'obtenir 2 jetons jaunes sur 5 tirages successifs avec remise.

Nous sommes donc en présence d'une loi binomiale de paramètres:

$$n = 5 \text{ et } p = \frac{20}{50} = 0,4.$$

Dans ces conditions: P (obtenir " 2 " jetons jaunes) $= \binom{5}{2} \times (0,4)^2 \times (0,6)^3$

$\approx 0,346.$

Ainsi la probabilité demandée est de: $34,6\%$.

5. **La probabilité de tirer au moins un jeton jaune est...**

D'après l'énoncé, le sac contient:
- **20 jetons jaunes**
- **30 jetons bleus.**

Ici, il s'agit de calculer la probabilité d'obtenir au moins 1 jeton jaune sur 5 tirages successifs avec remise.

Nous sommes donc en présence d'une loi binomiale de paramètres:

$$n = 5 \text{ et } p = \frac{20}{50} = 0,4.$$

Dans ces conditions: P (obtenir au moins " 1 " jeton jaune)

$$= 1 - P(\text{obtenir " 0 " jeton jaune})$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5$$

$$= 1 - (0,6)^5$$

$$\approx 0,922.$$

Ainsi la probabilité demandée est de: $92,2\%$.

6. **En moyenne le nombre de jetons jaunes tirés est égal à...**

D'après l'énoncé, le sac contient:
- **20 jetons jaunes**
- **30 jetons bleus.**

Ici, il s'agit de calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X qui suit une binomiale $B(5\,;\,0,4)$.

Dans ces conditions: $E(X) = n \times p$

$= 5 \times 0,4$

$= 2$.

Ainsi, en moyenne le nombre de jetons jaunes tirés est égal à: 2.