BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

AMÉRIQUE DU NORD 2022

ART CONTEMPORAIN

CORRECTION

1. a. Vérifions que le triangle ART est isocèle en A:

Nous savons que: A (6 ; 0 ; 2), R (6 ; 3 ; 4) et T (3 ; 0 ; 4).

Le triangle **ART** est isocèle en A ssi **ses deux côtés AR et AT sont de même longueur** **cad** **ssi**: **AR = AT**.

Or ici: • $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} x_R - x_A \\ y_R - y_A \\ z_R - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} x_T - x_A \\ y_T - y_A \\ z_T - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Et: • $AR = \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

• $AT = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Donc **AR = AT** et par conséquent: **le triangle ART est isocèle en A.**

1. b. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$:

$\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = (0 \times (-3)) + (3 \times 0) + (2 \times 2) = 4.$

D'où: $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = 4.$

1. c. Déduisons-en une valeur approchée de l'angle $\widehat{RAT}$:

L'angle $\widehat{RAT}$ noté α est tel que: $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}}{AR \cdot AT}$ (cours)

$$\Longleftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}$$

$$\text{cad} \quad \cos(\alpha) = \frac{4}{13}.$$

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $\widehat{RAT} = \alpha \approx 72{,}1°.$

2. a. Justifions que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; -2 ; 3) est un vecteur normal au plan (ART):

Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ont pour coordonnées: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Notons que: $x_{\overrightarrow{AR}} = 0 \times x_{\overrightarrow{AT}}$ et $z_{\overrightarrow{AR}} \neq 0 \times z_{\overrightarrow{AT}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ne sont donc pas proportionnels et, **par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

Les points A, R et T ne sont donc pas alignés et définissent le plan (ART).

Le vecteur $\vec{n}$ (2 ; -2 ; 3) est normal au plan (ART) ssi ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ du plan (ART).

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AR} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AR} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AT} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AT} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AR} = (2 \times 0) + ((-2) \times 3) + (3 \times 2) = 0$

• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AT} = (2 \times (-3)) + ((-2) \times 0) + (3 \times 2) = 0.$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$: le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ART).

2. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (ART):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}\,(a; b; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

• le point $A \in (ART)$, avec $A = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\iff 2 \times (x - 6) - 2 \times (y - 0) + 3 \times (z - 2) = 0$

cad $2x - 2y + 3z - 18 = 0.$

Une équation cartésienne du plan (ART) est donc bien: $2x - 2y + 3z - 18 \overset{4}{=} 0$.

3. a. Justifions la représentation paramétrique donnée dans l'énoncé:

La droite Δ est orthogonale au plan **(ART)** et passe par le point **S**.

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici:
- la droite Δ passe par le point $S\left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$
- un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point **S** et de vecteur directeur $\vec{n}$ (2 ; -2 ; 3) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \times k \\ y = \frac{5}{2} + (-2) \times k \\ z = 0 + 3 \times k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc:

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \dfrac{5}{2} - 2k \quad , k \in IR. \\ z = 3k \end{cases}$$

3. b. Démontrons que le point L a pour coordonnées $\left(5 ; \dfrac{1}{2} ; 3\right)$:

Le point **L** est le point d'intersection de la droite **Δ** avec le plan **(ART)**.

Les coordonnées du point **L** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_L = 3 + 2k & (1) \\ y_L = \dfrac{5}{2} - 2k & (2) \\ z_L = 3k & (3) \\ 2x_L - 2y_L + 3z_L - 18 = 0 & (4) \end{cases}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$(4) \iff 2x_L - 2y_L + 3z_L - 18 = 0 \iff 6 + 4k - 5 + 4k + 9k - 18 = 0$

$\iff 17k - 17 = 0$

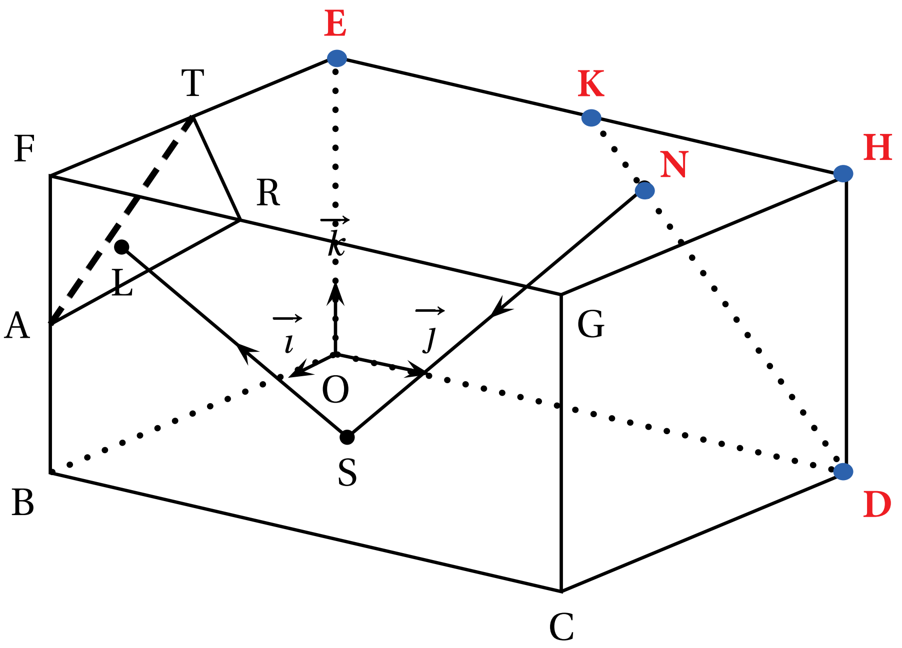
cad $k = 1$.

Les coordonnées du point L sont donc:

- $x_L = 3 + 2 \times 1 = 5$
- $y_L = \dfrac{5}{2} - 2 \times 1 = \dfrac{1}{2}$.

• $z_L = 3 \times 1 = 3$

4. a. Montrons que pour tout $t \in [\,0\,;\,1\,]$, N est un point du segment [DK]:



Ici: • N a pour coordonnées $(\,0\,;\,8 - 4t\,;\,4t\,)$, $t \in [\,0\,;\,1\,]$,

• D a pour coordonnées $(\,0\,;\,8\,;\,0\,)$ car $\vec{j} = \dfrac{1}{8}\,\overrightarrow{OD}$,

• E a pour coordonnées $(\,0\,;\,0\,;\,4\,)$ car $\vec{k} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{OE}$,

• H a pour coordonnées $(\,0\,;\,8\,;\,4\,)$ car $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$,

• K a pour coordonnées $(\,0\,;\,4\,;\,4\,)$ car K est le milieu du segment [EH].

• Pour $t \in [\,0\,;\,1\,]$, les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{ND}$ ont pour coordonnées respectives:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \\ -4t \end{pmatrix}.$$

Comme $\overrightarrow{ND} = -t \times \overrightarrow{DK}$, les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{ND}$ sont proportionnels et donc colinéaires. Les points N, D et K sont par conséquent alignés.

• Pour vérifier que N est un point du segment [DK], nous allons montrer que

$$\overrightarrow{NK} \cdot \overrightarrow{ND} \leqslant 0.$$

Or: $\overrightarrow{NK} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 + 4t \\ 4 - 4t \end{pmatrix}$, $t \in [\,0\,;\,1\,]$.

Dans ces conditions: $\overrightarrow{NK} \cdot \overrightarrow{ND} = (0 \times 0) + (-4 + 4t) \times (4t) + (4 - 4t) \times (-4t)$

$$= -16t + 16t^2 - 16t + 16t^2$$

$$= 32t \times (t - 1).$$

Comme $t \in [\,0\,;\,1\,]$, $32t \times (t - 1) \leqslant 0$ et donc: **N est bien un point du segment [DK].**

4. b. Calculons les coordonnées exactes du point N:

Les coordonnées exactes du point N sont telles que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ ont pour coordonnées respectives:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -3 \\ \dfrac{11}{2} - 4t \\ 4t \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ sont orthogonaux ssi: $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$.

Or: $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0 \iff 2 \times (-3) + (-2) \times \left(\frac{11}{2} - 4t \right) + 3 \times (4t) = 0$

$\iff -6 - 11 + 8t + 12t = 0$

$\iff 20t - 17 = 0$

cad $t = \frac{17}{20}$.

Avec $t = \frac{17}{20} \in [0; 1]$, le vecteur $\overrightarrow{SN}$ a donc pour coordonnées:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{11}{2} - 4 \times \left(\frac{17}{20} \right) \\ 4 \times \left(\frac{17}{20} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{21}{10} \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées exactes du point N sont donc:

- $x_N = x_S + (-3) = 3 - 3 = 0$

- $y_N = y_S + \left(\frac{21}{10} \right) = \frac{5}{2} + \frac{21}{10} = \frac{23}{5}$.

- $z_N = z_S + \left(\frac{17}{5} \right) = 0 + \frac{17}{5} = \frac{17}{5}$