BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

AMÉRIQUE DU NORD 2022

VOLUME DU TÉTRAÈDRE JKLT

CORRECTION

1. a. Montrons que le triangle JKL est rectangle en J:

Nous savons que: $J\,(2\,;0;\,1)$, $K\,(1;2;\,1)$ et $L\,(-2;-2;-2)$.

Le triangle JKL est rectangle en J ssi: $KL^2 = JK^2 + JL^2$.

Or: • $\overrightarrow{JL} = \begin{pmatrix} x_L - x_J \\ y_L - y_J \\ z_L - z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ -2-0 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} x_K - x_J \\ y_K - y_J \\ z_K - z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} x_L - x_K \\ y_L - y_K \\ z_L - z_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ -2-2 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions: • $JL^2 = (-4)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 = 29$

• $JK^2 = (-1)^2 + 2^2 + 0^2 = 5$

• $KL^2 = (-3)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 = 34$.

Comme $KL^2 = JK^2 + JL^2$, le triangle ABC est rectangle en J.

1. b. Calculons la valeur exacte de l'aire du triangle JKL en cm^2:

L'aire du triangle JKL est: $\mathcal{A}(JKL) = \frac{JK \cdot JL}{3}$.

Or: $JK = \sqrt{5}$ et $JL = \sqrt{29}$.

D'où la valeur exacte de l'aire du triangle JKL est: $\mathcal{A}(JKL) = \frac{\sqrt{145}}{2}$ cm^2.

1. c. Déterminons une valeur approchée de l'angle $\widehat{JKL}$:

L'angle $\widehat{JKL}$ noté α est tel que: $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{KL}}{JK \cdot KL}$ (cours)

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{((-1) \times (-3)) + (2 \times (-4))}{\sqrt{5} \times \sqrt{29}}$$

cad $\cos(\alpha) = \frac{11}{\sqrt{145}}$.

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $\widehat{JKL} = \alpha \approx 67{,}5°$.

2. a. Montrons que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (JKL):

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{KL}$ ont pour coordonnées: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Notons que: $x_{\overrightarrow{JK}} = -\frac{1}{3} \times x_{\overrightarrow{KL}}$ et $y_{\overrightarrow{JK}} \neq -\frac{1}{3} \times y_{\overrightarrow{KL}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{KL}$ ne sont donc pas proportionnels et, **par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

Les points J, K et L ne sont donc pas alignés et définissent le plan (JKL).

Le vecteur $\vec{n}$ (6 ; 3 ; - 10) est normal au plan (JKL) ssi ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{KL}$ du plan (JKL).

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{JK} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{JK} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{KL} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{KL} = 0. \end{cases}$

Nous avons:
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{JK} = (6 \times (-1)) + (3 \times 2) + ((-10) \times 0) = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{KL} = (6 \times (-3)) + (3 \times (-4)) + ((-10) \times (-3)) = 0.$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{KL}$: le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (JKL).

2. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (JKL):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A (x_A ; y_A ; z_A) et un vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$

• le point $K \in (JKL)$, avec $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_K) + b(y - y_K) + c(z - z_K) = 0$

$\iff 6 \times (x - 1) + 3 \times (y - 2) + (-10) \times (z - 1) = 0$

cad $6x + 3y - 10z - 2 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (JKL) est donc: $6x + 3y - 10z - 2 = 0$.

3. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ:

La droite Δ est orthogonale au **plan (JKL)** et passe par le point T.

D'après le cours, nous savons que:

• Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.

• Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.

• La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite Δ passe par le point $T(10; 9; -6)$

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point T et de vecteur directeur $\vec{n} = (6 ; 3 ; -10)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 10 + 6 \times t \\ y = 9 + 3 \times t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = -6 + (-10) \times t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite (Δ) est donc:

$$\begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = -6 - 10t \end{cases}$$

3. b. Déterminons les coordonnées du point H:

Le point H est le projeté orthogonal de T sur le plan (JKL).

Les coordonnées du point H vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_H = 10 + 6t & (1) \\ y_H = 9 + 3t & (2) \\ z_H = -6 - 10t & (3) \\ 6x_H + 3y_H - 10z_H - 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$(4) \iff 6x_H + 3y_H - 10z_H - 2 = 0 \iff 60 + 36t + 27 + 9t + 60 + 100t - 2 = 0$

$\iff 145t + 145 = 0$

cad $t = -1$.

Les coordonnées du point H sont donc:

- $x_H = 10 + 6 \times (-1) = 4$
- $y_H = 9 + 3 \times (-1) = 6$.
- $z_H = -6 - 10 \times (-1) = 4$

3. c. Calculons la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT en cm^3:

Le tétraèdre JKLT a pour **hauteur [TH]** et pour **base le triangle (JKL), rectangle en J.**

Nous savons que le volume du tétraèdre JKLT est donné par:

$$V_{JKLT} = \frac{(\text{Aire base triangle JKL}) \times (\text{Hauteur tétraèdre JKLT})}{3}$$

$$= \frac{(\text{Aire base triangle rectangle JKL}) \times TH}{3}.$$

Or: $JK = \sqrt{5}$, $JL = \sqrt{29}$ et $TH = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 10^2} = \sqrt{145}$.

D'où: $$V_{JKLT} = \frac{\mathcal{A}(JKL) \times TH}{3}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145}}{3}$$

$$= \frac{145}{6}.$$

La valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT est donc:

$$V_{JKLT} = \frac{145}{6} \text{ cm}^3.$$