BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

AMÉRIQUE DU NORD
2022

LA TEMPÉRATURE DU GÂTEAU

CORRECTION

1. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$:

Ici:
- $T_{n+1} = 0,955\, T_n + 0,9$
- $T_0 = 180$
- $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $T_n \geqslant 20$ ".

Initialisation: $T_0 = 180 \geqslant 20$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $T_n \geqslant 20$ et montrons qu'alors $T_{n+1} \geqslant 20$.

Supposons: $T_n \geqslant 20$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'où: (1) => $0,955\, T_n \geqslant 0,955 \times 20$

=> $0,955\, T_n + 0,9 \geqslant 0,955 \times 20 + 0,9$

$\Rightarrow \; 0,955\, T_n + 0,9 \geq 20$

$\Rightarrow \; T_{n+1} \geq 20.$

Conclusion: *Pour tout entier naturel n, $T_n \geq 20$.*

1. b. b₁. Vérifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0,045\,(T_n - 20)$:

Pour tout entier naturel n: $T_{n+1} - T_n = 0,955\, T_n + 0,9 - T_n$

$= -0,045\, T_n + 0,9$

$= -0,045\,(T_n - 20).$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $T_{n+1} - T_n = -0,045\,(T_n - 20).$

1. b. b₂. Déduisons-en le sens de variation de la suite (T_n):

Pour cela, nous devons déterminer le signe de: $T_{n+1} - T_n$.

Or: $T_n \geq 20$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où: $T_{n+1} - T_n = -0,045\,(T_n - 20) \leq 0.$

Ainsi: la suite (T_n) est décroissante.

1. c. Déduisons-en que la suite (T_n) est convergente:

D'après les questions précédentes:
- $T_n \geq 20$ (minorant $m = 20$)
- (T_n) est décroissante.

Or, d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (T_n) est convergente.

2. a. Montrons que la suite (U_n) est géométrique dont on précisera la raison:

$U_n = T_n - 20 \iff U_{n+1} = T_{n+1} - 20$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\iff U_{n+1} = (0{,}955\ T_n + 0{,}9) - 20 \quad (1).$

Or: $U_0 = T_0 - 20$ cad $U_0 = 180 - 20 = 160$ et $T_n = U_n + 20$.

D'où: $(1) \iff U_{n+1} = (0{,}955\,[\,U_n + 20\,] + 0{,}9) - 20$

$\iff U_{n+1} = 0{,}955 \times U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent: (U_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0{,}955$ et de premier terme $U_0 = 160$.

2. b. Déduisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 20 + 160 \times (0{,}955)^n$:

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- $U_{n+1} = 0{,}955 \times U_n$ cad $U_n = (0{,}955)^n \times U_0$
- $T_n = U_n + 20.$

D'où, pour tout entier naturel n: $T_n = 160 \times (0{,}955)^n + 20$, avec $U_0 = 160$.

2. c. Calculons la limite de la suite (T_n):

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \lim_{n \to +\infty} 160 \times (0{,}955)^n + 20$$

$$= 20 \quad \text{car} \quad \lim_{n \to +\infty} (0{,}955)^n = 0, \quad \text{car} \quad 0{,}955 \in \,]\,0\,;\,1\,[.$$

D'où: $\lim_{n \to +\infty} T_n = 20.$

2. d. Résolvons l'inéquation $T_n \leqslant 120$:

$$T_n \leqslant 120 \iff 160 \times (0,955)^n + 20 \leqslant 120$$

$$\iff (0,955)^n \leqslant \frac{5}{8}$$

$$\iff n \times \ln(0,955) \leqslant \ln\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)}, \text{ car } 0,955 \in]\,0\,;\,1\,[$$

cad $n \geqslant 10,207$ ou $n \geqslant 11$ ($n \in \mathbb{N}$).

Ainsi $T_n \leqslant 120$ quand : $n \geqslant 11$, car n est un entier naturel.

3. a. Expliquons pourquoi la limite de la suite (T_n) était prévisible :

Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder sa chaleur à l'extérieur.

Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'environnement ambiant, le gâteau va voir sa température diminuer pour atteindre celle de l'extérieur soit 20°C.

3. b. b_1. Donnons le résultat obtenu en exécutant la commande *temp(120)*.

Le résultat obtenu en exécutant la commande *temp(120)* est : le premier nombre entier n tel que $T_n \leqslant 120$, soit $n = 11$.

3. b. b_2. Interprétation du résultat :

Cela signifie que : il faudra 11 minutes avant que la température du gâteau soit inférieure ou égale à 120°C.