BREVET, DNB
CORRIGÉ

Mathématiques

POLYNÉSIE

2024

Brevet — 2024 — Polynésie — Série Générale

Correction

C'est un sujet d'un bon niveau avec des parties assez difficiles. Excellent pour les révisions.

Exercice n° 1 — Cinq questions sans justification *20 points*

Théorème de Pythagore — Fonction affine — Homothétie — Ratio — Arithmétique

Un QCM complet qui peut poser des difficultés. Un ratio et une homothétie. La question sur la fonction affine est délicate.

1. Comme AC est le plus long côté du triangle ABC, comparons $BA^2 + BC^2$ et AC^2 :

$BA^2 + BC^2$	AC^2
$20^2 + 21^2$	29^2
$400 + 441$	
441	841

Comme $BA^2 + BC^2 = AC^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est rectangle en B.

$\boxed{\textbf{Question n° 1 : } \text{ABC est un triangle rectangle en B.}}$

2. En considérant le graphique, on constate que c'est une droite. Il s'agit donc de la représentation graphique d'une fonction affine.
Chacune des propositions est de la forme $ax + b$, tout va bien !

Méthode n° 1 : calcul de certaines images.

On constate aussi que cette droite passe par quelques points dont il est facile de lire les coordonnées : $A(-4;-1)$, $B(-2;0)$, $C(0;1)$, $D(2;1)$.

Il reste à vérifier en calculant les images. En utilisant le graphique, on doit avoir $f((-4) = -1$, $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$ et $f(2) = 1$ (voir les points A, B, C et D).
La valeur $f(0)$ est facile à calculer. Elle vaut -2 pour la première fonction, 1 pour la deuxième, -2 pour la troisième et 1 pour la dernière.

Il reste donc, par élimination, $f(x) = 2x + 1$ ou $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$.
En utilisant les points A, C ou D, c'est à dire $f(-4)$, $f(-2)$ ou $f(2)$ on élimine l'une des deux.
Pour la fonction $f(x) = 2x + 1$, il est facile de voir que $f(-4) = -8 + 1 = -7$, que $f(-2) = -3$ ou que $f(2) = 5$.

La fonction cherchée est donc $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$.

Méthode n° 2 : par une méthode directe.

La fonction affine cherchée est de la forme $ax + b$. On sait que b est l'ordonnée à l'origine, c'est à dire l'ordonnée du points de la droite ayant pour abscisse 0.
Cette ordonnée correspond à celle du point C, donc $b = 1$.

Pour déterminer a, le coefficient directeur, on remarque, par exemple en partant du point C qu'il faut avancer de deux unités en abscisse pour monter d'une unité en ordonnée. En effet en partant du point $C(0;1)$, on arrive au point $D(2;1)$ en avancant de deux unités horizontales pour une unité verticale. Le coefficient directeur est égal au quotient de ces deux écarts. Ces deux grandeurs sont proportionnelles, et le coefficient multiplicateur a permet de passer de l'écart horizontal à l'écart vertical.

$2a = 1$ donc $a = \dfrac{1}{2}$, la fonction est donc $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 = \dfrac{x}{2} + 1$.

$\boxed{\textbf{Question n° 2 : } f(x) = \dfrac{x}{2} + 1}$

3. Le carré n° 2 est clairement deux fois plus grand que le carré n° 1. Il s'agit donc d'une homothétie. Or le carré n° 1 et le carré n° 2 sont de part et d'autre du point O, il s'agit donc d'une homothétie de rapport négatif.

$\boxed{\textbf{Question n° 3 : } \text{l'homothétie de centre O et de rapport -2.}}$

4. Être dans un ration 10:6:2 signifie que les quantités d'ingrédients sont proportionnelles au nombre 10, 6 et 2.
On peut ainsi dresser un tableau contenant les grandeurs proportionnelles :

	Ananas	Fruit de la passion	Citron	Total
Ratio	10	6	2	10+6+2=18
Quantité		$\dfrac{6\times 90\,\text{cL}}{18}=\dfrac{540\,\text{cL}}{18}=30\,\text{cL}$		90 cL

Question n° 4 : 30 cL de jus de fruit de la passion.

On pouvait aussi remarquer que ce cocktail est constitué de 10+6+2=18 portions de fruits et que le jus de fruit de la passion en représente un tiers, $\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$.

5. Nous sommes à la recherche du plus grand diviseur commun à ces deux nombres.

Première méthode : par élimination.

Il suffit de diviser 408 et 168 par chacune des propositions.

$408 = 48\times 8+24$ et $168 = 48\times 3+24$: il ne peut pas faire 48 sacs.
$408 = 24\times 17$ et $168 = 24\times 7$: il peut faire 24 sacs.
$408 = 8\times 51$ et $168 = 8\times 21$: il peut faire 8 sacs.
$408 = 6\times 68$ et $168 = 6\times 28$: il peut faire 6 sacs.
Le plus grand diviseur proposé est donc 24.

Seconde méthode : méthode directe par décomposition en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 408 & 2 \\ 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$408 = 2\times 2\times 2\times 3\times 17$ $\qquad$ $168 = 2\times 2\times 2\times 3\times 7$

En comparant les décompositions, on peut construire le plus grand diviseur commun, sa décomposition en produit de facteurs premiers contient les facteurs communs au deux décomposition.
Il s'agit de $2\times 2\times 2\times 3 = 24$

Question n° 5 : 24 sacs.

Exercice n° 2 — Les jeux olympiques *17 points*

Lecture diagramme — Moyenne — Pourcentage — Médiane

Un exercice assez simple qui utilise quelques éléments statistiques.

1. Le éditions qui ont eu un coup réel supérieur ou égal à 10 milliard d'euros sont Athènes 2004, Pékin 2008, Londres 2012, Rio 2016 et Tokyo 2021.

Cinq éditions ont eu un coup supérieur ou égal à 10 milliards d'euros.

2. Pour les JO de Rio de Janeiro, le coût prévisionnel était de 9 milliards et le coût réel de 16,5 milliards.

Méthode n° 1 : un produit en croix.

Coût en milliards d'euros	9	16,5
Pourcentage	100	$\dfrac{100 \times 16,5}{9} \approx 183,33$

C'est une augmentation d'environ $83,33$ %.

Méthode n° 2 : le coefficient d'augmentation.
On cherche le nombre k vérifiant :

$$\begin{aligned} 9 \times k &= 16,5 \\ k &= \frac{16,5}{9} \\ k &\approx 1,8333 \end{aligned}$$

Or $1,8333 = 1 + 0,8333 = 1 + \dfrac{83,33}{100}$ soit un augmentation d'environ $83,33$ %.

$\boxed{\text{L'augmentation du budget réel par rapport au budget prévision pour les JO de Rio de Janeiro en 2016 est d'environ 83 \%.}}$

3. Il faut calculer $\dfrac{9,3+2,3+5,5+10+31+11+16,5+12,1}{8} = \dfrac{97,7}{8} = 12{,}2125$

$\boxed{\text{Le coût réel moyen entre 1992 et 2021 a été d'environ 12,2 milliards d'euros au dixième de milliards près.}}$

4.a. Ce journaliste semble confondre la médiane et la moyenne d'une série statistique.
D'ailleurs, sur les huit éditions, six ont un coût réel inférieur à 12,2 milliards d'euros.

$\boxed{\text{Ce journaliste confond la médiane et la moyenne de cette série statistique.}}$

4.b. La prévision du journaliste consiste à dire que la moyenne sur les neufs éditions entre 1992 et 2024 du coût prévisionnel est de 5,5 milliards d'euros.
Pour faire ce calcul il faut faire la somme des neuf coûts prévionnels puis diviser par 9.

Ajoutons les huit coûts prévisionnels connus : $3,5+1,8+3+5,3+2,6+4,8+9+13 = 43$.
En ajoutant le coût prévisuonnel pour Paris puis en divisant par neuf on veut obtenir 5,5 milliards d'euros. Cela signifie que la somme des neuf coût prévisionnels vaut $9 \times 5,5 = 49,5$.
Le coût prévisionnel pour Paris correspond donc au nombre à ajouter à 43 pour obtenir $49,5$ soit $49,5 - 43 = 6,5$.

$\boxed{\text{Le coût prévisionnel pour Paris est de 6,5 milliards d'euros.}}$

On peut vérifier en calculant : $\dfrac{3,5+1,8+3+5,3+2,6+4,8+9+13+6,5}{9} = \dfrac{49,5}{9} = 5,5$.

Exercice n° 3 — Le centre olympique de Saint-Denis *22 points*

Théorème de Pythagore — Théorème de Thalès — Trigonométrie — Grandeurs composées — Volume du pavé droit

Un exercice de géométrie très complet qui termine sur des questions qui concernent une grandeur composée.

1.a. Dans le triangle ABC rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\begin{aligned} CA^2 + CB^2 &= AB^2 \\ 15^2 + 27^2 &= AC^2 \\ 225 + 729 &= AC^2 \\ AC^2 &= 954 \\ AC &= \sqrt{954} \\ AC &\approx 31 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La distance entre Alyssa et le bord de la piscine mesure environ 31 m.}}$

1.b. On constate en observant la figure que (JH)ă ⊥ (FE) et que (DE) ⊥ (FE).
Or on sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**
Ainsi (JH)//(DE)

Dans le triangle DFE, **Les droites** (JH) **et** (DE) **sont parallèles.**
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{FH}{FE} = \frac{FJ}{FD} = \frac{HJ}{ED}$$

$$\frac{7\,\text{m}}{18\,\text{m}} = \frac{15\,\text{m}}{FD} = \frac{JH}{DE}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$FD = \frac{15\,\text{m} \times 18\,\text{m}}{7\,\text{cm}} \quad \text{d'où} \quad FD = \frac{270\,\text{m}^2}{7\,\text{m}} \quad \text{et} \quad FD \approx 39\,\text{m}$$

Finalement $JD = FD - FJ = 39\,\text{m} - 15\,\text{m} = 24\,\text{m}$

On a bien $JD \approx 24\,\text{m}$ au mètre près.

1.c. $\boxed{\text{Alyssa est environ à 31 m du bord de la piscine et Jules a environ 24 m, donc Jules est le plus près.}}$

2. Dans le triangle ABC rectangle en C on connaît la mesure des trois côtés. On peut donc calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ d'une des trois manières suivantes :

AB est l'hypoténuse.
BC est le côté adjacent à $\widehat{ABC}$.

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{27\,\text{m}}{31\,\text{m}}$$

À la calculatrice :
Seconde cos (27 ÷ 31)

AB est l'hypoténuse.
AC est le côté opposé à $\widehat{ABC}$.

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{15\,\text{m}}{31\,\text{m}}$$

À la calculatrice :
Seconde sin (27 ÷ 31)

BC est le côté adjacent à $\widehat{ABC}$.
AC est le côté opposé à $\widehat{ABC}$.

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{15\,\text{m}}{27\,\text{m}}$$

À la calculatrice :
Seconde tan (27 ÷ 31)

Dans tous les cas, on arrive à $\boxed{\widehat{ABC} \approx 29° \text{ au degré près, ce qui est conforme à la norme car inférieur à } 35°.}$

Je conseille d'utiliser la tangente qui ne met en jeu que des longueurs fournies dans l'énoncé !

4. Même si l'énoncé ne l'indique pas de manière explicite, le document suggère que l'énergie produite est proportionnelle à la surface de panneaux photovoltaïques.

Le panneau proposé mesure 1 m de large sur 1,7 m de long. Sa surface est donc de $1\,\text{m} \times 1{,}7\,\text{m} = 1{,}7\,\text{m}^2$.

On peut présenter cette situation dans un tableau présentant des grandeurs proportionnelles :

Surface	$1{,}7\,\text{m}^2$	$4678{,}4\,\text{m}^2$
Énergie	$350\,\text{kWh}$	$\dfrac{350\,\text{kWh} \times 4678{,}4\,\text{m}^2}{1{,}7\,\text{m}^2} \approx 963\,200\,\text{kWh}$

$\boxed{\text{L'énergie produite sur ce toit est donc bien de 963 200 kWh.}}$

5. Il faut calculer le volume de cette piscine. Elle est en forme de pavé droite de longueur 50 m, de largeur 25 m et de profondeur 3 m.

Son volume mesure $50\,\text{m} \times 25\,\text{m} \times 3\,\text{m} = 3750\,\text{m}^3$.

Il faut 9,3 kWh pour chauffer $1\,\text{m}^3$ d'eau.

Comme $3750 \times 9{,}3\,\text{kWh} = 34\,875\,\text{kWh}$, $\boxed{\text{il faut 34 875 kWh pour chauffer l'eau de cette piscine.}}$

Exercice n° 4 — Une expérience aléatoire à deux épreuves *18 points*

Expérience aléatoire à deux épreuves — Arithmétique

Un exercice assez classique qui met en œuvre une expérience aléatoir à deux épreuves. La dernière question est intéressante.

1.

Second tirage / Premier tirage	3	5
5	$5 \times 3 = 15$	$5 \times 5 = 25$
2	$2 \times 3 = 6$	$2 \times 5 = 10$
3	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 5 = 15$

2. Comme on le voit dans le tableau à double entrée, il y a 6 issues équiprobables possibles à cette expérience aléatoire à deux épreuves.
Or deux issues permettent d'obtenir 15.

La probabilité cherchée est de $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$ soit environ 33 %.

3. Les issues suivantes sont des multiples de trois : $15 = 3 \times 5$, $6 = 3 \times 2$, $3 = 3 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$.
Cela fait 4 issues sur 6 possibles.

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \approx 0,67$ soit environ 67 %.

L'affirmation est donc vraie.

4. Décomposons les nombres 168 et 78 en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{c|c} 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{c|c} 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$168 = 3 \times 5 \times 11$

$78 = 2 \times 3 \times 13$

Les facteurs 11 et 13 indiquent les numéros inscrits sur les boules de la troisième urne.

Exercice n° 5 — Une fonction affine et une fonction du second degré *23 points*

Algorithmique — Tableur — Équation du premier degré — Équation produit

Un exercice particulièrement difficile qui insiste sur le sens de la résolution d'une équation. Les aspects techniques sont complexes sur la fin.

Partie A

1. $f(-4) = (-4+2)^2 - (-4) = (-2)^2 + 4 = 4 + 4 = 8$

2. Il faut résoudre l'équation suivante :

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 3\\
7x+4 &= 3\\
7x+4-4 &= 3-4\\
7x &= -1\\
x &= -\frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

$-\frac{1}{7}$ est l'antécédent de 3 par la fonction g.

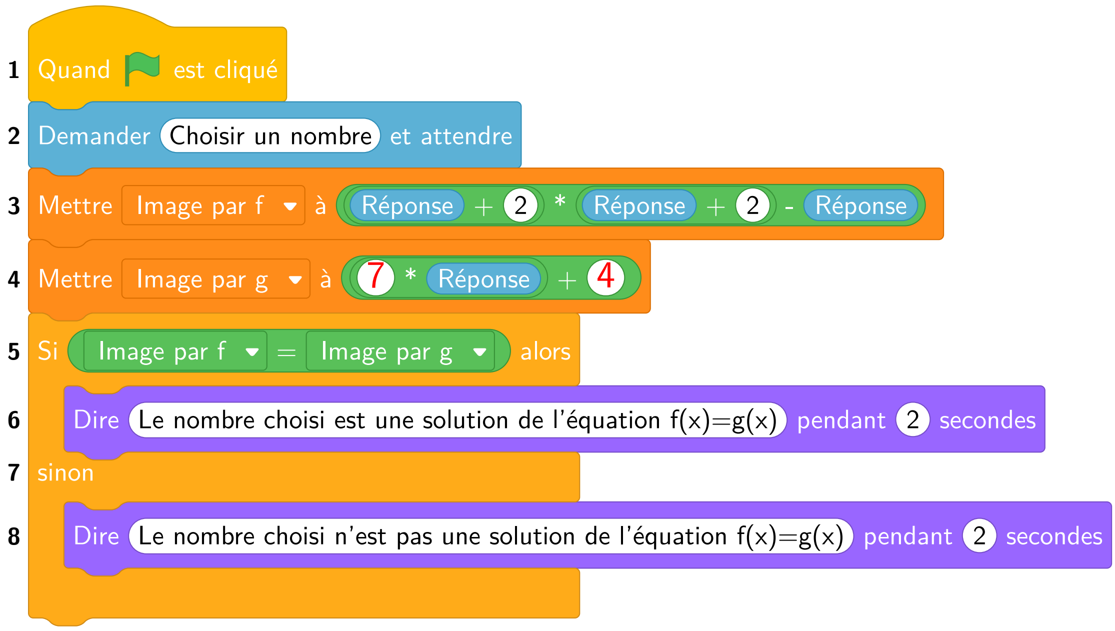
Partie B

1.a. Dans la cellule **B3** a été saisie la formule **=7*B1+4**

1.b. On constate que dans la colonne **E** les cellules **E2** et **E3** contiennent le même nombre 4.

Paul trouve une solution avec sa méthode, pour le nombre 0, f et g ont la même image 4.

2.a.



2.b. En choisissant 0 comme nombre de départ, on obtient $f(0) = 4$ et $g(0) = 4$ comme on l'a vu à la question **1.b.**

Le programme va répondre : **Le nombre choisi est une solution de l'équation f(x)=g(x).**

2.c. Une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est 0.

3.a. Résolvons l'équation :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x)\\
(x+2)^2 - x &= 7x+4\\
(x+2)(x+2) - x &= 7x+4\\
x^2+2x+2x+4-x &= 7x+4\\
x^2+3x+4 &= 7x+4\\
x^2+3x+4-4 &= 7x+4-4\\
x^2+3x &= 7x\\
x^2+3x-7x &= 7x-7x\\
x^2-4x &= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) = g(x) \text{ sont strictement les mêmes que celles de l'équation } x^2 - 4x = 0.}$

Je trouve cette question particulièrement difficile !

3.b. Factorisons :
$x^2 - 4x = x \times x - 4 \times x = x \times (x - 4)$

$\boxed{\text{La forme factorisée de } x^2 - 4x \text{ est } x(x-4).}$

3.c. Il reste ainsi à résoudre :

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$x - 4 = 0$$
$$x - 4 + 4 = 0 + 4$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = 4$$

Il y a donc deux solutions à cette équation : $\boxed{0 \text{ et } 4.}$

4. Résoudre une équation revient à déterminer **toutes** les valeurs de x telles que l'égalité soit vérifiée.

$\boxed{\text{Jane et Paul n'ont trouvé qu'une solution, 0. Morgane est la seule à avoir résolu l'équation en trouvant les deux seules solutions 0 et 4.}}$