CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SUJET • Session de 2019

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale ES

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2019

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminales ES et L

DURÉE : 5 HEURES

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

Marche aléatoire

Soit q un entier naturel.
Un individu se déplace sur les points d'abscisse 0, 1, 2, …, q selon les règles suivantes :

- À l'instant 0, il est placé au point d'abscisse q.
- Si à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$) l'individu est placé sur le point d'abscisse k, alors, à l'instant $n+1$, l'individu est placé de façon équiprobable sur l'un des $k+1$ points d'abscisses 0, 1, 2, … k.

Pour tout entier naturel n, on définit la variable aléatoire X_n qui est égale à l'abscisse du point où est placé l'individu à l'instant n.

On note $P(A)$ la probabilité d'un évènement A et $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X.

1° Dans cette question, on suppose $q = 1$.

(a) Justifier que $P(X_0 = 1) = 1$, et que $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

(b) Montrer que $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{4}$ et $P(X_2 = 0) = \dfrac{3}{4}$.

(c) Pour tout entier naturel n, montrer

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1).$$

(d) Pour tout entier naturel n, déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 0)$. Déterminer alors les limites de $P(X_n = 1)$ et de $P(X_n = 0)$ quand n tend vers l'infini.

(e) Pour tout entier naturel n, déterminer $E(X_n)$. En déduire la limite de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

(f) Soit U_n la matrice ligne $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) & P(X_n = 1) \end{pmatrix}$
Déterminer une matrice carrée M à deux lignes et deux colonnes telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n M$.

2° Dans cette question, on suppose $q = 2$.

(a) Exprimer $P(X_{n+1} = 0)$ à l'aide de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$.
Exprimer de même $P(X_{n+1} = 1)$ et $P(X_{n+1} = 2)$.

(b) Pour tout entier naturel n, soit U_n la matrice ligne $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) & P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.
Déterminer une matrice carrée M à trois lignes et trois colonnes telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n M$.

(c) On considère la matrice colonne $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exprimer le résultat du produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à l'aide de A.

(d) Exprimer $E(X_{n+1})$ à l'aide de U_{n+1} et A.

(e) En déduire une relation entre $E(X_{n+1})$ et $E(X_n)$. Déterminer la limite de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

(f) Montrer que la suite $(P(X_n = 2))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, que l'on déterminera.

(g) En combinant les deux questions précédentes, montrer, pour tout entier naturel n,

$$P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right).$$

(h) En déduire, pour tout entier naturel n,

$$P(X_n = 0) = 1 - 2 \times \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}.$$

(i) Donner les limites de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$ quand n tend vers l'infini. Interpréter le résultat.

3° On suppose dans cette question $q = 3$.

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Exprimer MA à l'aide de A. Exprimer MB à l'aide de B.

(b) Pour tout entier naturel n, on pose

$$\alpha_n = E(X_n) \quad \text{et} \quad \beta_n = E\big(\frac{1}{2}X_n(X_n - 1)\big).$$

À l'aide de la question précédente, montrer que (α_n) et (β_n) sont des suites géométriques. En déduire des expressions de α_n et de β_n en fonction de n.

(c) Pour tout entier naturel n, déterminer $P(X_n = 3)$.

(d) Pour tout entier naturel n, déterminer $P(X_n = 2)$. On pourra utiliser la suite (β_n).

(e) Pour tout entier naturel n, déterminer $P(X_n = 1)$. On pourra utiliser la suite (α_n).

(f) Pour tout entier naturel n, déterminer $P(X_n = 0)$.

4° Dans cette question, on se place dans le cas général où q est un entier naturel quelconque.

(a) Pour tout entier naturel n, déterminer $P(X_n = q)$.

(b) On suppose ici $q \geqslant 1$ et pour tout entier naturel n, on pose $u_n = P(X_n = q - 1) + qP(X_n = q)$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique, que l'on déterminera. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de $P(X_n = q - 1)$.

(c) On suppose ici que $q \geqslant 2$. Que vaut $P(X_n = q - 2)$?

(d) Plus généralement, voyez-vous une méthode pour déterminer $P(X_n = q - k)$ pour d'autres valeurs de l'entier k ? Appliquer la méthode pour $k = 3$.

PROBLÈME II

Fonctions convexes

Dans ce problème, u désigne une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on note f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}.$$

1° (a) Montrer que si u est une fonction convexe, alors f est une fonction convexe.

(b) La réciproque est-elle vraie ?

2° Pour tout réel λ, on note f_λ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f_\lambda(x) = f(x)\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

(a) Montrer que si u est une fonction convexe, alors, pour tout nombre réel λ, la fonction f_λ est convexe.

(b) Réciproquement, montrer que si, pour tout nombre réel λ, la fonction f_λ est convexe, alors u est une fonction convexe.

PROBLÈME III

Polynômes de Lagrange

Soit n un entier naturel non nul.
On considère n points du plan : M_1 de coordonnées (a_1, b_1), M_2 de coordonnées $(a_2, b_2), \dots, M_n$ de coordonnées (a_n, b_n).
On suppose que les abscisses a_1, $a_2, \dots, a_n$ sont deux à deux distinctes.
Le but de ce problème est la recherche d'une fonction polynôme de degré au plus $n-1$ dont la courbe représentative passe par M_1, $M_2, \dots, M_n$.

1° Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On considère donc les réels a_1, a_2, b_1, b_2 (a_1 et a_2 étant distincts). Pour tout réel x, on pose $R(x) = x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2$.

- (a) Résoudre l'équation $R(x) = 0$, d'inconnue x.
- (b) Donner la forme factorisée de $R(x)$.
- (c) Calculer $R'(a_1)$ et $R'(a_2)$.
- (d) Pour tout x réel, on pose $K_1(x) = \dfrac{x - a_2}{a_1 - a_2} b_1$.
  Calculer $K_1(a_1)$ et $K_1(a_2)$.
- (e) Construire de même une fonction affine K_2 telle que $K_2(a_1) = 0$ et $K_2(a_2) = b_2$.
- (f) Construire enfin une fonction affine F telle que $F(a_1) = b_1$ et $F(a_2) = b_2$.

2° Dans cette question, on suppose que $n = 3$. On considère donc les réels a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, et on suppose que a_1, a_2 et a_3 sont deux à deux distincts.
Pour tout réel x, on pose $S(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$.

- (a) Soit u, v, w trois fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
  Calculer la fonction dérivée du produit uvw.
- (b) En déduire, pour tout réel x, une expression de $S'(x)$.
- (c) Calculer $S'(a_1)$, $S'(a_2)$ et $S'(a_3)$.
- (d) Pour tout réel x, on pose
  $$L_1(x) = \frac{(x - a_2)(x - a_3)}{S'(a_1)} b_1.$$
  Calculer $L_1(a_1)$, $L_1(a_2)$ et $L_1(a_3)$.
- (e) Construire une fonction polynôme G de degré au plus 2 telle que $G(a_1) = b_1$, $G(a_2) = b_2$, $G(a_3) = b_3$.

  On admet que si une fonction polynôme de degré au plus $n-1$ s'annule en n réels distincts, alors tous ses coefficients sont nuls. En déduire que la fonction polynôme G est unique.
- (f) On considère le système d'équations d'inconnues x, y, z :
  $$\begin{aligned} x + a_1 y + (a_1)^2 z &= b_1 \\ x + a_2 y + (a_2)^2 z &= b_2 \\ x + a_3 y + (a_3)^2 z &= b_3 \end{aligned}$$
  Montrer que ce système admet un unique triplet (x, y, z) solution, et expliciter sa solution en fonction de a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.

3°
- (a) Dans cette question, n est un entier naturel non nul. On considère des réels a_1, $a_2, \dots, a_n$, b_1, $b_2, \dots, b_n$ et on suppose que les réels a_1, $a_2, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.
  Montrer qu'il existe une unique fonction polynôme de degré au plus $n-1$ dont la courbe représentative passe par les points M_1, $M_2, \dots, M_n$ définis au début de ce problème.
- (b) En utilisant la question précédente, résoudre le système d'équations d'inconnues x, y, z, t :
  $$\begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ x + 2y + 4z + 8t &= 0 \\ x + 3y + 9z + 27t &= 0 \\ x + 4y + 16z + 64t &= 1 \end{aligned}$$