CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SUJET • Session de 2017

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale ES

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2017

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminales ES et L

DURÉE : 5 HEURES

La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

Fonctions de type C

1° Soit a et b deux réels distincts et soit h l'application qui à tout réel t de $[0,1]$ associe

$$h(t) = ta + (1-t)b.$$

On suppose dans un premier temps que $a < b$.

(a) En étudiant les variations de h sur $[0,1]$, montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) \in [a,b]$.

(b) Montrer que pour tout réel x de $[a,b]$, il existe un unique t de $[0,1]$ tel que $h(t) = x$. Exprimer t en fonction de x, a et b.

(c) Adapter ce qui précède au cas $b < a$.

2° Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I et soit a et b deux réels distincts de I. On note Δ la droite passant par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. On rappelle d'autre part que le segment $[AB]$ est appelé *corde* définie par A et B.

(a) Quelle est l'équation de la droite Δ ?

(b) Pour tout réel t, on note $P(t)$ le point de Δ d'abscisse $ta + (1-t)b$. Montrer que l'ordonnée de $P(t)$ est égale à $tf(a) + (1-t)f(b)$. Quel est l'ensemble décrit par $P(t)$ quand t décrit $[0,1]$?

Dans la suite de ce problème, on dira qu'une fonction définie sur un intervalle I est de « type C » sur I si pour tous a, b dans I et pour tout $t \in [0,1]$, $f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$.

3° Justifier, à l'aide des questions précédentes, que la courbe d'une fonction de type C est en dessous de ses cordes.

4° (a) La fonction $x \mapsto |x|$ est-elle de type C sur $\mathbb{R}$?

(b) La fonction $x \mapsto x^2$ est-elle de type C sur $\mathbb{R}$?

(c) Pour tout réel x, on appelle partie entière de x et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 1{,}35 \rfloor = 1$, $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2$.

i. Tracer la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur le segment $[-2,2]$.

ii. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle de type C sur $[-2,2]$? Sur $[0,1]$?

5° On suppose ici que f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, telle que sa fonction dérivée seconde f'' soit positive sur I.

Soit a et b deux réels de I. On supposera ici, pour fixer les idées, que $a < b$.

On définit φ l'application qui à tout $t \in [0,1]$ associe $\varphi(t) = tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b)$.

(a) On admet que si $u : t \mapsto u(t)$ est dérivable sur $[0,1]$ à valeurs dans $[a,b]$ et si f est dérivable sur $[a,b]$, alors $t \mapsto f(u(t))$ est dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée est $t \mapsto u'(t)f'(u(t))$ sur $[0,1]$. Justifier que φ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et que pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi''(t) \leqslant 0$.

(b) Que peut-on en déduire pour la fonction φ' ?

(c) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire que φ' ne peut pas rester strictement positive sur $[0,1]$, et qu'elle ne peut pas non plus rester strictement négative sur $[0,1]$. Donner alors l'allure du tableau de variations de φ.

(d) Conclure que f est de type C sur I.

6° (a) Justifier à l'aide de la question précédente que la fonction $x \mapsto -\ln x$ est de type C sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Soit x, y et z trois réels strictement positifs.
En écrivant que $\dfrac{1}{3}(x+y+z) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + \dfrac{z}{3}$, montrer que $\ln\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) \geqslant \dfrac{\ln x + \ln y + \ln z}{3}$.

(c) En déduire que pour tous réels strictement positifs x, y et z,

$$(xyz)^{1/3} \leqslant \frac{x+y+z}{3}.$$

PROBLÈME II

Étude d'une suite

Dans ce problème, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Partie A

Dans cette partie, on considère l'équation (E) $\qquad x^2 - x - 1 = 0$.

1° Résoudre (E).

2° On note α la solution strictement positive de (E).
Montrer que la seconde solution, que l'on notera β, vérifie $\beta = 1 - \alpha = -\dfrac{1}{\alpha}$.

Les deux parties suivantes B et C sont indépendantes entre elles. Le candidat choisit celle qu'il souhaite traiter.
La partie B utilise l'enseignement de spécialité de la série ES et est destinée aux candidats ayant suivi cet enseignement. La partie C est destinée aux élèves de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et aux élèves de la série L.

Partie B

1° On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

- (a) Que vaut X_0 ?
- (b) Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de X_n en fonction de A^n et X_0,

2° On note $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$. Montrer que $AC_1 = \alpha C_1$ et $AC_2 = \beta C_2$.

3° Montrer que la matrice P ayant pour colonnes, dans cet ordre, C_1 et C_2, est inversible.

4° (a) Soit M et N des matrices carrées d'ordre 2. On note K_1 et K_2 les colonnes de N. Justifier que la matrice MN a pour colonnes MK_1 et MK_2.

- (b) À quoi est égale la matrice $P^{-1}P$? En déduire, sans utiliser l'expression explicite de la matrice P^{-1}, l'expression des colonnes $P^{-1}C_1$ et $P^{-1}C_2$.
- (c) En déduire, à l'aide du moins de calculs possible, l'expression de la matrice $P^{-1}AP$.

5° (a) Soit $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Donner l'expression de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (b) En déduire l'expression de A^n, puis de X_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \beta u_n$.

1° Montrer, pour tout entier n, que $v_{n+1} = \beta v_n$.

2° En déduire une expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3° Donner de même une expression de w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie D

1° Déduire des résultats de la partie B ou de la partie C une expression de u_n en fonction de n, α et β, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2° Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3° Quelle est la limite de la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

PROBLÈME III

Jeu de pile ou face

On dispose d'une pièce de monnaie, non supposée équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est égale à $p \in]0,1[$. On pourra poser $q = 1 - p$.

Un jeu se déroule de la manière suivante.
Un joueur lance successivement et indépendamment n fois la pièce, où n est un entier supérieur ou égal à 2. Chaque fois que le joueur obtient Pile, il gagne 1 euro et chaque fois qu'il obtient Face, il perd 1 euro. La fortune initiale du joueur est f_0 euros, où f_0 est un entier relatif (une dette est comptée comme une fortune négative et le joueur peut être débiteur en début de jeu).

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note X_k la variable aléatoire définie par :
$X_k = 1$ si le joueur obtient Pile au k-ième lancer;
$X_k = -1$ si le joueur obtient Face au k-ième lancer.

On définit de plus les variables aléatoires suivantes :
- Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, $G_k = X_1 + \cdots + X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$;
- $F_0 = f_0$;
- Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, F_k est la variable aléatoire égale à la fortune du joueur, positive ou négative, après le k-ième lancer.

On munit le plan d'un repère orthonormé. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on considère le point $M_k(k, F_k)$ dont l'abscisse est égale à k et l'ordonnée est égale à F_k.
On appelle *trajectoire* la ligne brisée dont les sommets sont les points $M_k(k, F_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
Ainsi M_0 est le point de coordonnées $(0, F_0)$.

On rappelle que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons d'obtenir k Pile et $n-k$ Face après n lancers de pièce.

Partie A

On prend dans cette partie $n = 5$ et $f_0 = 2$.

1° Représenter une trajectoire possible.

2° Étant donné un point $M(5, y)$, avec y entier relatif, existe-t-il toujours une trajectoire de M_0 à $M(5, y)$?

3° Donner un algorithme qui affiche les coordonnées d'un point d'arrivée à l'issue de cinq lancers.

Partie B

1° Construire à partir de X_i une variable aléatoire Y_i suivant une loi de Bernoulli, à valeurs dans $\{0,1\}$, telle que $Y_i = 1$ si le joueur obtient Pile au i-ème lancer et $Y_i = 0$ si le joueur obtient Face au i-ème lancer.

2° Donner, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la loi de G_k puis celle de F_k.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et b un entier relatif. On note $M(n, b)$ le point de coordonnées (n, b).

3° (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur b pour qu'il existe une trajectoire de $M_0(0, f_0)$ à $M(n, b)$.
On note D l'ensemble des entiers relatifs b pour lesquels cette condition est vérifiée.

(b) Pour $b \in D$, donner en fonction de n, b, f_0, p la probabilité $P(n, b, f_0, p)$ que la fortune du joueur soit b à l'issue de n parties.

4° On suppose dans cette question que la fortune initiale du joueur est $f_0 > 0$ (sauf dans la question 4° (c) où $f_0 \geqslant 0$) et que sa fortune à la fin du jeu est égale à $b \in D$ où $b > 0$.

(a) On note M'_0 le symétrique du point M_0 par rapport à l'axe des abcisses.
Montrer qu'il y a autant de trajectoires de $M_0(0, f_0)$ à $M(n, b)$ ayant au moins un sommet sur l'axe des abcisses que de trajectoires de M'_0 à $M(n, b)$.

(b) En déduire la probabilité que dans une trajectoire de $M_0(0, f_0)$ à $M(n, b)$, tous les sommets aient une ordonnée strictement positive.
À quoi correspond pour le joueur une telle trajectoire ?

(c) On suppose dans cette question que $f_0 \geqslant 0$ et on suppose encore que la fortune du joueur à la fin du jeu est égale à $b \in D$ où $b > 0$.
Quelle est la probabilité que dans une trajectoire de $M_0(0, f_0)$ à $M(n, b)$, tous les sommets aient une ordonnée positive ou nulle ?
À quelle situation du joueur correspond une telle trajectoire ?

Partie C

On considère maintenant que la pièce est équilibrée ($p = q = \frac{1}{2}$) et on suppose que $f_0 = 0$. Le joueur lance la pièce $2n$ fois. Soit b un entier relatif tel qu'il existe une trajectoire de $M_0(0,0)$ à $M(2n, b)$.
On considère les trajectoires de $M_0(0,0)$ à $M(2n, b)$.

1° Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant 2n$.
Montrer que si une trajectoire de $M_0(0,0)$ à $M(2n, b)$ passe par le point $(k, 0)$, alors k est pair.

2° Calculer $p_{2n} = P(F_{2n} = 0)$.

3° Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note N_{2n} le nombre de trajectoires de $M_0(0,0)$ à $M(2n, 0)$ telles que, pour tout entier $i \in [1, 2n-1]$, F_i est strictement positif. Montrer

$$N_{2n} = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}.$$