1. Suites

1.1 Somme des termes d'une suite géométrique

Théorème 1 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0. La somme S_n des $(n+1)$ premier termes est égale à :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration : on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= u_0 + (q \times u_0) + (q^2 \times u_0) + \cdots + (q^n \times u_0) \\ &= u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) \end{aligned}$$

On pose : $A_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$

En soustrayant les deux lignes suivantes, on obtient :

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n \\ q \times A_n &= \quad\; q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1} \\ \hline A_n - q \times A_n &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

On obtient alors : $A_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Conclusion : On a donc $S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

1.2 Inégalité de Bernoulli

Théorème 2 : $\forall a \in [0;+\infty], \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$

Démonstration : Par récurrence

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $(1+a)^0 \geqslant 1+0a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie donc :

$$(1+a)^n \geqslant 1+na$$

Or, $1+a > 0$, donc en multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1+a)$, on obtient :

$$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a)$$

Or

$$(1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2$$

et comme $\quad na^2 \geqslant 0$:

$$(1+na)(1+a) \geqslant 1+(n+1)a$$

D'où

$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

Conclusion : on a :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

Donc : $\forall a \in [0;+\infty], \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$

1.3 Théorèmes de comparaison

Théorème 3 : Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Si à partir d'un certain rang, on a :

1) **Théorème d'encadrement ou "des gendarmes"**

$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$ et $\lim_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$

2) **Théorème de comparaison**

- $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- $u_n \leqslant w_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Pré-requis : Définition de la limite infinie d'une suite

Démonstration : Seule la preuve du théorème de comparaison en $+\infty$ est exigible.

On sait que : $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, donc pour tout réel A, il existe un entier N tel que si $n > N$ alors $v_n \in]A; +\infty[$

Comme $u_n > v_n$ à partir du rang p donc si $n > \max(N, p)$ alors $u_n \in]A; +\infty[$

On a donc bien : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

1.4 Limite d'une suite géométrique

Théorème 4 : Soit q un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas

Pré-requis : Inégalité de Bernoulli et théorème de comparaison en $+\infty$

Démonstration : Seule la preuve de la première limite est exigible

D'après l'inégalité de Bernoulli, on a :

$$\forall a > 0 \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

On pose $q = 1 + a$ donc si $a > 0$ on a $q > 1$. L'inégalité devient :

$$q^n \geqslant 1 + na$$

Comme $a > 0$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$

D'après le théorème de comparaison on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Remarque : Pour démontrer la deuxième limite, on peut poser $Q = \dfrac{1}{|q|}$, avec $0 < |q| < 1$ donc $Q > 1$. On revient alors à la première limite et l'on conclut avec le quotient sur les limites.

1.5 Suite croissante non majorée

Théorème 5 : Divergence

- Si une suite (u_n) est **croissante et non majorée** alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et non minorée** alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Pré-requis : Définition d'une suite non majorée.

Démonstration : Seule la preuve de la première propriété est exigible. Soit donc une suite (u_n) croissante et non majorée.

(u_n) n'est pas majorée, donc pour tout intervalle $]A;+\infty[$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad u_N \in]A;+\infty[$$

Comme (u_n) est croissante, on a :

$$\forall n > N \quad \text{alors} \quad u_n > u_N$$

Donc :

$$\forall n > N \quad \text{alors} \quad u_n \in]A;+\infty[$$

donc à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A;+\infty[$. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.