5. Probas à Densité

5.1 Loi exponentielle - loi sans mémoire

Théorème 20 : La loi exponentielle est une loi **sans mémoire** c'est à dire que :

$$\forall t > 0 \text{ et } h > 0 \quad \text{on a} \quad P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$$

Prérequis : Définition de la loi et $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda a}$

Démonstration : On applique la formule des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) &= \frac{P(X \geqslant t \text{ et } X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} = P(X \geqslant h) \end{aligned}$$

Remarque : On dit que la durée de vie d'un appareil est sans mémoire lorsque la probabilité que l'appareil fonctionne encore h années supplémentaires sachant qu'il fonctionne à l'intant t, **ne dépend pas de** t.

5.2 Expérance d'une loi exponentielle

Théorème 21 : Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors son espérance mathématique vaut :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration : D'après la définition, en posant $g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$, on a :

$$\mathrm{E}(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Il faut trouver une primitive de la fonction g, pour cela on dérive la fonction g

$$g'(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda^2 t e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda g(t) \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g'(t)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g'(t)\right)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g(t)\right]_0^x \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(-e^{-\lambda t} - g(x) + 1 + g(0)\right) = \frac{1}{\lambda}\left(-e^{-\lambda t} - \lambda x e^{-\lambda t} + 1\right)\end{aligned}$$

On pose : $Y = -\lambda x$, on a alors :

Si $x \to +\infty$ alors $Y \to -\infty$

D'où : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = \lim_{Y \to -\infty} e^Y = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \lambda x e^{-\lambda x} = \lim_{Y \to -\infty} -Y e^Y = 0$

Par somme et produit, on a alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

5.3 Loi normale - Probabilité d'intervalle centré en 0

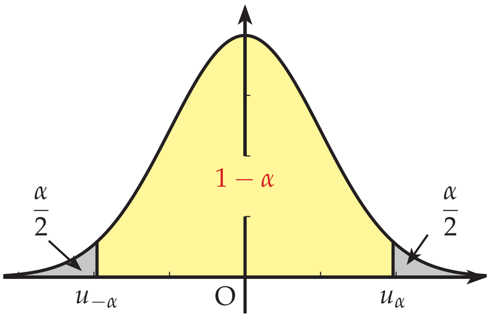
Théorème 22 : X est une variable aléatoire qui suit un loi normale centrée réduite. Soit α un réel de l'intervalle $]0\,;1[$. Il existe un **unique** réel **strictement positif** u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$$

Pré-requis : Loi normale centrée réduite et théorème des valeurs intermédiaires

Démonstration : On cherche un réel x strictement positif tel que :

$$\begin{aligned} P(-x \leqslant X \leqslant x) &= 1-\alpha \\ \Phi(x) - \Phi(-x) &= 1-\alpha \\ \Phi(x) - 1 + \Phi(x) &= 1-\alpha \\ 2\Phi(x) - 1 &= 1-\alpha \\ \Phi(x) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$



On sait que la fonction Φ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. De plus :

$$\lim_{x\to 0} \Phi(x) = \Phi(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$$

et $\quad 0 < \alpha < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2} < 1 - \dfrac{\alpha}{2} < 1$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x = u_\alpha$ strictement positif tel que $\Phi(x) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

5.4 Intervalle de fluctuation

Théorème 23 : Si la varialble aléatoire X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ alors pour tout réel α de $]0\,;1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n}\in I_n\right)=1-\alpha \quad \text{où} \quad I_n=\left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

u_α étant le nombre tel que $P(-u_\alpha\leqslant Z\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$ lorsque Z suit ine loi normale centrée réduite.

Remarque : le mot asymptotique vient du passage à la limite de l'intervalle I_n

Démonstration : On pose $Z_n=\dfrac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$

D'après le théorème Moivre-Laplace : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(-u_\alpha\leqslant Z_n\leqslant u_\alpha)$ suit une loi normale centrée réduite de variable aléatoire Z.

On sait d'après les propriétés de la loi normale centrée réduite que pour tous α de $]0\,;1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha\leqslant Z\leqslant u\alpha)=1-\alpha$$

De plus :

$$-u_\alpha\leqslant Z_n\leqslant u_\alpha$$

$$-u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\leqslant X_n-np\leqslant u_\alpha\sqrt{np(1-p)}$$

$$np-u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\leqslant X_n\leqslant np+u_\alpha\sqrt{np(1-p)}$$

$$np-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{X_n}{n}\leqslant p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n}\in I_n\right)=1-\alpha$

5.5 Statistique - Intervalle de confiance

On suppose les trois conditions d'approximations remplies :

$$n \geqslant 30, \quad np \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geqslant 5$$

Théorème 24 : Soit F_n la variable aléatoire qui à chacun des échantillons de taille n associe la fréquence du caractère dans cet echantillon.

La proportion inconnue p est telle que :

$$P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$$

Démonstration : On a vu que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% peut être simplifié par : $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

On a donc :

$$\begin{aligned} p - \frac{1}{\sqrt{n}} &\leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -\frac{1}{\sqrt{n}} &\leqslant F_n - p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} &\leqslant -p \leqslant -F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} &\leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Ainsi : $P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$