3. Nombres Complexes

3.1 Propriétés des modules

Théorème 17 : Pour tous complexes z et z' non nuls, on a les relations suivantes :

1) $|z\,z'| = |z| \times |z'|$ 2) $|z^n| = |z|^n$ 3) $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Prérequis : On suppose que $z\,\overline{z} = |z|^2$

Démonstration :

1) Pour le produit : on calcule la quantité :

$$|z\,z'|^2 = z\,z' \times \overline{z\,z'} = z\,z' \times \overline{z}\,\overline{z'} = z\,\overline{z} \times z'\,\overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2$$

Le module d'un nombre complexe est positif, donc : $|z\,z'| = |z| \times |z'|$

2) Pour la seconde, il suffit de faire une récurrence à partir du produit.

3) Pour le qutient, on pose pour $(z' \neq 0)$: $Z = \dfrac{z}{z'}$

On a alors : $z = Z\,z'$ par la propriété du produit $|z| = |Z|\,|z'|$

d'où $|Z| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

3.2 Propriétés des arguments

Théorème 18 : Pour tous complexes z et z' non nuls, on a les relations suivantes :

1) $\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
2) $\arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$
3) $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$

Prérequis : On suppose connu les formules d'addition de cosinus et sinus :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b\end{aligned}$$

Démonstration :

1) On pose $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$
   où r et r' d'une part et θ et θ' d'autre part sont respectivement les modules et arguments des nombres complexes z et z'.
   On calcule :

$$\begin{aligned}z\,z' &= r\,r'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')\\ &= r\,r'(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta')\\ &= r\,r'\left[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right]\\ &= r\,r'\left[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right]\end{aligned}$$

   Par identification, on en déduit alors :

$$|z\,z'| = r\,r' = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad \arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

2) On démontre $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$ par récurrence à partir de la propriété du produit.

3) Pour le quotient, on pose $Z = \dfrac{z}{z'}$, on a donc $z = Z\,z'$. Par la propriété du produit, on a :

$$\arg(z) = \arg(Z) + \arg(z') \quad [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \arg(Z) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$