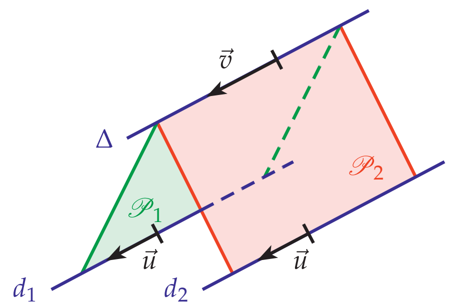
6. Géométrie dans l'Espace

6.1 Le théorème du toit

Théorème 25 : Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. Si ces deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite Δ, alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2.

Démonstration : Par l'absurde. On considère que Δ n'est pas paralléles à d_1 ce qui entraine que Δ n'est pas parallèle à d_2.
On appelle $\vec{v}$ un vecteur directeur de Δ

- Comme d_1 et d_2 sont parallèles, on appele $\vec{u}$ leur vecteur directeur.
- Comme Δ n'est pas parallèle à d_1, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc, comme Δ est contenu dans $\mathscr{P}_1$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}_1$.
- Comme Δ est aussi contenu dans $\mathscr{P}_2$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}_2$.



- On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles qui est contradictoire avec l'hypothèse $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sécants

Δ est donc parallèle à d_1 et d_2.

6.2 Droite orthogonale à un plan

Théorème 26 : Une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ perpendiculaires à Δ.

Démonstration :

- $\Rightarrow$ Si Δ est orthogonale à $\mathscr{P}$ donc Δ est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$ donc à deux sécantes de $\mathscr{P}$
- $\Leftarrow$ Soit $\vec{n}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ les vecteurs directeurs respectifs des deux sécantes de $\mathscr{P}$: d_1 et d_2.
  1) Δ est perpendiculaire à d_1 et d_2 donc : $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$
  2) d_1 et d_2 sont sécantes donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéraires, ils forment donc un couple de vecteurs directeur du plan $\mathscr{P}$.
  3) Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur d'une droite quelconque de $\mathscr{P}$, comme $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ forme un couple de vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$, on a : $\vec{v} = a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.
  4) $\overrightarrow{n} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{n} \cdot (a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2) = a\,\overrightarrow{n} \cdot \vec{u}_1 + b\,\overrightarrow{n} \cdot \vec{u}_2 = 0$ d'après le 1)

  Δ est donc orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$, donc Δ est orthogonale à $\mathscr{P}$

6.3 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 27 : L'équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{avec } a, b \text{ et } c \text{ non tous nul}$$

Le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est alors un vecteur normal au plan.

Démonstration :

- $\Rightarrow$ Soit un plan $\mathscr{P}$, un point A de $\mathscr{P}$, un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ de $\mathscr{P}$. Un point $\mathrm{M}(x; y; z)$ du plan $\mathscr{P}$ vérifie alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$$
$$a(x - x_{\mathrm{A}}) + b(y - y_{\mathrm{A}}) + c(z - z_{\mathrm{A}}) = 0$$
$$ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$$

  On pose $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on a alors

$$ax + by + cz + d = 0$$

- $\Rightarrow$ Si on a l'équation : $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non tous nul, on peut toujours trouver un point $\mathrm{A}(x_0; y_0; z_0)$ qui verifie l'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

  On a alors $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, par exemple, si $a \neq 0$, on peut prendre $x_0 = -\dfrac{d}{a}$ et $y_0 = z_0 = 0$.

  Si $\mathrm{M}(x; y; z)$ vérifie l'équation, alors : $ax + by + cz + d = 0$, et en remplaçant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, on obtient alors :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

  Cette égalité traduit alors, en prenant $\vec{n}(a; b; c)$, la relation $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$. Ce qui montre que le plan passe par M et a pour vecteur normal $\vec{n}$.

Remarque : L'équation cartésienne n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients a, b et c par un facteur k non nul.