2. Fonctions, Dérivées, Limites et Intégrales

2.1 Unicité de la fonction exponentielle

Théorème 6 : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

On nomme cette fonction exponentielle et on la note : exp

Démonstration : L'existence de cette fonction est admise.
Démontrons l'unicité.

- **La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.**

  Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x)f(-x)$.
  Montrons que la fonction φ est constante. Pour cela dérivons φ.

  $$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$$

  Comme $f' = f$, on a :

  $$\begin{aligned} &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Comme $\varphi' = 0$ alors la fonction φ est constante. Donc :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \varphi(0) = f^2(0) = 1$$

  On en déduit alors : $f(x)f(-x) = 1$, donc la fonction f ne peut s'annuler.

- **Unicité**

  On suppose que deux fonctions f et g vérifient les conditions du théorème, soit $f = f', g' = g$ et $f(0) = g(0) = 1$. La fonction g ne s'annule donc pas, on définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction h par $h = \dfrac{f}{g}$. On dérive h :

  $$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$$

  La fonction h est donc constante et $h(x) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$

  On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

  On en déduit que $f = g$. L'unicité est ainsi prouvé.

2.2 Relation fonctionnelle de l'exponentielle

Théorème 7 : Soit a et b deux réels, on a alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Remarque : Cette relation s'appelle la relation fonctionnelle car on pourrait définir l'exponentielle à partir de cette propriété pour retrouver que l'exponentielle est égale à sa dérivée.

Démonstration : Posons la fonction $h(x) = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$.
Montrons alors que la fonction h n'est autre que la fonction exponentielle. Il suffit alors de Montrer que $h' = h$ et $h(0) = 1$:

$$h'(x) = \frac{\exp'(x+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = h(x)$$

$$h(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = 1$$

La fonction h est donc la fonction exponentielle. On en déduit alors :

$$\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = \exp(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$$

2.3 Limites en l'infini de l'exponentielle

Théorème 8 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Démonstration : Soit la fonction f suivante : $f(x) = e^x - x$.

Dérivons la fonction f : $f'(x) = e^x - 1$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a :

$$f'(x) > 0 \iff x > 0 \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \iff x < 0$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Du tableau de variation on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0 \quad \text{donc} \quad e^x > x$

or on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ par comparaison on a :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

En faisant le changement de variable $X = -x$, on obtient :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

2.4 Limites de référence de l'exponentielle

Théorème 9 : On a : $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration : La démonstration découle de la définition de la dérivée en 0 appliquée à la fonction e^x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

Théorème 10 : **Croissance comparée**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Démonstration : Comme pour la limite de e^x en $+\infty$, on étudie les variation d'une fonction. Soit donc la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

On calcule la dérivée g' : $g'(x) = e^x - x$

D'après le paragraphe 2.3, on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > x \quad \text{donc} \quad g'(x) > 0$

La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $g(0) = 1$ donc si $x > 0$ alors $g(x) > 0$. On en déduit donc que :

$$x > 0 \quad g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, par comparaison, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Pour la deuxième limite, on fait un changement de variable $X = -x$, on obtient alors :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{X \to +\infty} (-X)e^{-X} = -\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

Conséquence : la fonction exponentielle « l'emporte » sur la fonction x.

2.5 Logarithme du produit

Théorème 11 : Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

Démonstration : D'après les propriétés de l'exponentielle, on a :

$$e^a = e^b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

Or $\quad e^{\ln ab} = ab \quad$ et $\quad e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$

On conclut donc que $\quad \ln ab = \ln a + \ln b$.

Remarque : C'est cette propriété qui est à l'origine de la fonction logarithme.

2.6 Limites de la fonction logarithme en 0 et en l'infini

Théorème 12 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Démonstration :

- Pour montrer la limite en $+\infty$, on revient à la définition :

  Pour tout $M > 0$, si $\ln x > M$ alors, comme la fonction exp est croissante, $x > e^M$.

  Il existe donc un réel $A = e^M$ tel que si $x > A$ alors $\ln x > M$.

  Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

- Pour la deuxième limite, on fait un changement de variable. On pose $X = \dfrac{1}{x}$.
  Donc si $x \to 0^+$ alors $X \to +\infty$. On a alors :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{X \to +\infty} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \to +\infty} -\ln X = -\infty$$

2.7 Croissance comparée

Théorème 13 : Croissance comparée

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Pré-requis : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Démonstration :

- Pour la premère limite, on fait un changement de variable. On pose : $X = \ln x$, on a alors $x = e^X$. On a alors :

$$x \to +\infty \quad \text{alors} \quad X \to +\infty$$

  Notre limite devient alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

- Pour la deuxième limite, on fait le changement de variable suivant : $X = \frac{1}{x}$. On a alors :

$$x \to 0^+ \quad \text{alors} \quad X \to +\infty$$

  La deuxième limite devient alors :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$$

Remarque : On peut dire que : « x l'emporte sur $\ln x$ en $+\infty$ ».

2.8 Limites et dérivées des fonctions trigonométriques

Théorème 14 : D'après les fonctions dérivées des fonctions sinus et cosinus, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Pré-requis : Dérivées des fonctions sinus et cosinus.

Démonstration : On revient à la définition du nombre dérivée en 0.

$$\sin' 0 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

or on sait que : $\sin' 0 = \cos 0 = 1$ donc $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

de même, on a :

$$\cos' 0 = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

or on sait que : $\cos' 0 = -\sin 0 = 0$ donc $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

2.9 Théorème fondamental de l'intégration

Théorème 15 : Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

La fonction F définie par : $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $F' = f$

Démonstration : Dans le cas où f est croissante sur $[a;b]$ (On admet ce théorème dans le cas général).

On revient à la définition de la dérivée, il faut montrer que si $x_0 \in [a;b]$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

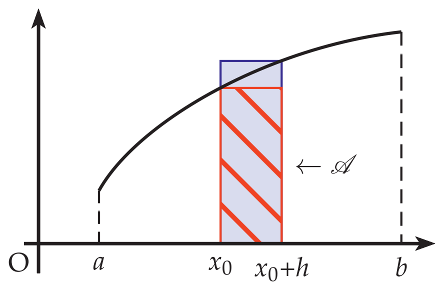
- **1^er^ cas** : $h > 0$, on a :

  $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{A}$
  (par soustraction d'aire).

  On sait que f est croissante sur $[a;b]$, donc si $t \in [x_0; x_0+h]$, on a :

  $$f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0+h)$$

  donc en encadrant l'aire $\mathscr{A}$ par le rectangle minorant (hachuré) et le rectangle majorant (bleu) l'aire (en bleu), on a :



$$f(x_0) \times h \leqslant \mathscr{A} \leqslant f(x_0+h) \times h$$

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

- **2^e^ cas** : $h < 0$, on montre de même que : $f(x_0+h) \leqslant \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$

- **Conclusion** : on sait que f est continue sur $[a;b]$, donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

  D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

2.10 Existence de primitives

Théorème 16 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitive sur I.

Démonstration : Cas où le fonction f est continue sur un intervalle $[a;b]$ et admet un minimum m.On pose la fonction g telle que : $g(x) = f(x) - m$

g est continue (car somme de fonction continue) et positive sur $[a;b]$. D'après le théorème fondamental, la fonction G définie ci-dessous est une primitive de g sur $[a;b]$.

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction F définie sur $[a;b]$ par : $F(x) = G(x) + mx$ est alors une primitive de f car :

$$F'(x) = G'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$$

Remarque : On admet ce théorème dans le cas général.

$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a