SciencesPo

Rapport de correction

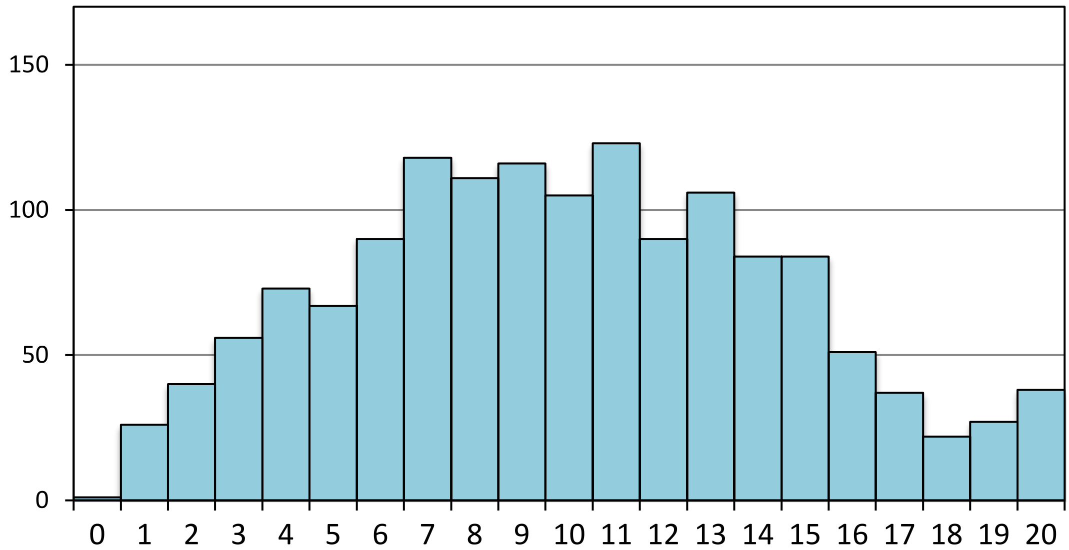
Epreuve de Mathématiques – Session 2018

Durée : 3 heures, coefficient : 2

Depuis la session 2013, le sujet est constitué d'un problème et d'un « Vrai – Faux ».
Le problème, noté cette année sur 8 points, consistait en l'étude de fonctions faisant intervenir des logarithmes : recherche du signe, étude des variations, calcul des limites, etc.
Le Vrai – Faux avec justification, noté sur 12 points, comprenait dix questions indépendantes, testant des connaissances et des compétences relatives à différents domaines du programme : probabilités, pourcentages, analyse (suites et fonctions), géométrie dans un repère, trigonométrie.

Les copies sont en général bien présentées. Les meilleures d'entre elles font l'objet d'une rédaction très soignée.
Certains candidats ont eu du mal à gérer le temps imparti, traitant visiblement dans la précipitation certaines questions du Vrai – Faux, ou du problème lorsque celui-ci était abordé en second. De façon générale, le problème a été nettement mieux réussi que le Vrai − Faux, ce dernier étant à tort parfois délaissé.

Les notes obtenues par les 1465 candidats ayant composé dans l'option Mathématiques se répartissent selon le graphique suivant. La moyenne est de 9,7 sur 20.



Problème

De façon générale, l'enchaînement entre les différentes parties n'a pas toujours été bien compris. Prendre le temps de lire l'intégralité du problème avant de s'attaquer à sa résolution devrait permettre au candidat d'avoir une vision d'ensemble facilitant la prise de recul.

Par ailleurs, on constate que pour les questions techniques exigeant une certaine dextérité calculatoire, les candidats ne savent pas toujours quel est le niveau de détail attendu, certains passant du temps pour obtenir des résultats déjà donnés ou passant trop rapidement sur des aspects délicats.

Partie A

Cette partie est en général bien traitée.
On s'étonne néanmoins de trouver des candidats qui ne savent pas traduire qu'un point appartient à une courbe ou qu'une tangente est horizontale (question 2).
Il était inutile de rechercher l'équation de la tangente en A. Il suffisait d'interpréter le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.

Partie B

La factorisation est généralement bien traitée. Cependant certains candidats se contentent de factoriser 2 et d'autres procèdent à une factorisation partielle de X.
La moitié des candidats réussit l'étude du signe. Comme indiqué dans l'énoncé, celle-ci reposait sur la factorisation précédente.

Partie C

Il fallait réduire au même dénominateur l'expression de $g(x)$ pour exploiter la partie B.
Le calcul de $g(1)$ constituait une aide pour l'étude du signe de g.
La stricte monotonie a parfois été escamotée.
Il convient de ne pas confondre les variations d'une fonction et son signe.

Partie D

Signalons que la courbe de la fonction f, fournie dans la partie A, offrait un précieux moyen de contrôle des résultats.
Si la question 1 a été bien traitée, la recherche des limites met en difficulté une majorité de candidats, en particulier ceux qui ne distinguent pas la présence d'une forme indéterminée.
Pour la limite en $+\infty$, il suffisait de factoriser x^2 afin de faire appel à des limites connues. Ceux qui n'ont pas pensé à cette possibilité ont parfois tenté de justifier le résultat en invoquant de façon incorrecte des arguments de croissance comparée, sans avoir préalablement factorisé.
Le recours à la question 1, qui permettait d'obtenir la limite en zéro à partir de celle en l'infini, n'a pratiquement jamais été envisagé.
La question 3, qui permettait de faire le lien entre la dérivée de f et la fonction g, a été bien réussie dans l'ensemble.

Partie E

Une bonne rédaction de la question 1 exigeait de faire intervenir le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction *h* donnée dans l'énoncé. Il n'était pas possible d'appliquer directement ce théorème pour la fonction *f* comme on l'a malheureusement vu trop souvent. Confondre de la sorte la variable *x* avec une constante est une erreur majeure.
L'égalité de la partie C établissant l'égalité entre l'image de *x* et celle de 1/*x* était essentielle pour traiter efficacement les questions 2 et 3.
L'algorithme demandé à la question 4 pouvait faire appel à la technique dite de balayage ou à une dichotomie. Bien que rarement abordée, cette question a fait l'objet de propositions intéressantes.

Vrai ou Faux

Le Vrai – Faux avec justification nécessite des connaissances étendues sur l'ensemble du programme et certaines compétences en matière de logique.
Les candidats qui souhaitent se préparer peuvent s'exercer en traitant par exemple les sujets des sessions précédentes.
Il est important de rappeler un principe essentiel : <u>alors qu'il suffit de produire un contre-exemple pour prouver qu'une affirmation est fausse, d'autres questions exigent de se placer dans le cas général pour donner une démonstration prouvant qu'une proposition est vraie</u>.

Question 1
Cette question a été bien réussie. Il est désormais largement assimilé qu'une augmentation de 3% se traduit par une multiplication par 1,03.
Même s'il était plus élégant de se placer dans le cas général en représentant le capital initial par une lettre, considérer un cas particulier permettait de montrer que la proposition est fausse.

Question 2
Cette question ne présentait pas de difficulté majeure, sous réserve que l'énoncé ait été bien compris. Il suffisait alors de considérer les différentes valeurs possibles de la variable aléatoire *N*, en s'aidant éventuellement d'un arbre.
On doit se réjouir que la formule de l'espérance soit désormais bien connue des candidats.
Par contre, il n'était pas pertinent de faire intervenir ici la loi binomiale.

Question 3
Le recours à la loi binomiale était parfaitement adapté pour cette question, qui a été bien réussie dans l'ensemble. Il convient bien sûr de ne pas confondre $1 - 0{,}03^{100}$ et $(1 - 0{,}03)^{100}$.

Question 4
Il n'est pas raisonnable de prétendre qu'une suite est arithmétique sous prétexte qu'elle est définie par une somme. De même, exprimer la raison en fonction de *n* trahit une mauvaise compréhension du concept de suite.
Le calcul des trois premiers termes suffisait pour constater que la suite (v_n) n'est pas géométrique. Il fallait par contre exprimer u_n en fonction de *n* dans le cas général pour prouver que la suite (u_n) l'est.

Question 5

Ne sachant pas si la suite (u_n) admet une limite, il était délicat de raisonner ici par l'absurde. Par contre, la multiplication par $1/n$ de l'expression considérée donnait instantanément la réponse.
Quelques candidats abusent de l'adverbe *forcément* pour essayer de convaincre, trahissant de la sorte l'insuffisance de leur argumentation.

Question 6
Une erreur a régulièrement été rencontrée dans le calcul de u_1, qui a pour valeur 2 et non −7.
Une démonstration par récurrence permettait de démontrer que l'affirmation est vraie.
L'initialisation est parfois mal posée, mais les correcteurs ont apprécié de voir un nombre important de candidats proposer une rédaction correcte.

Question 7
Il suffisait ici de fournir un contre-exemple comme par exemple f : $x \mapsto x+1$ et g : $x \mapsto x$.
La donnée d'un graphique convaincant était également acceptée.
On doit rappeler qu'une fonction ayant pour limite $+\infty$ en $+\infty$ n'est pas forcément croissante.

Question 8
Cette question assez technique, qui visait à apprécier la compétence des candidats en matière de calcul, semble avoir dérouté bon nombre d'entre eux.
Il convenait de mener les différentes étapes du développement de $f(2x)$ de façon soigneuse et ordonnée, en veillant à ne pas développer systématiquement tous les termes, la forme factorisée pouvant être plus appropriée à certaines étapes du calcul.

Question 9
Cette question était très voisine d'une question posée lors de la session précédente.
Après avoir utilisé la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, il fallait s'interroger sur le signe de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ pour conclure correctement. L'usage de la calculatrice n'était pas pertinent ici.

Question 10
Cette question, qui mettait en jeu des notions de géométrie plane du programme de première scientifique, a été très peu abordée.