

2

ALAIN  
PILLER

SUITES

*Rien de plus facile !*

BAC MATHS



SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

EXOS ANNALES BAC

TERM.

S

PREMIUM ÉDITEUR

# SAVOIR

## A Suite numérique

Une suite numérique est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ .

→ **Notations** : ■ L'image de  $n \in \mathbb{N}$ , notée  $u_n$ , s'appelle le terme général de la suite.

■ La suite s'écrit :  $(u_n)$  ou  $\{u_n\}$ .

→ **Exemple** : Soit  $\{u_n\}$ , la suite dont le terme général est :  $u_n = \frac{3n^2}{3n^3 + 7n^2}$ .

## B Suite arithmétique

Dire qu'une suite  $\{u_n\}$  est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre  $r$  (**raison**) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

→ **Propriétés** : ■  $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n - p) \cdot r$ .

$$\rightarrow u_n = u_0 + (n) \cdot r$$

$$\rightarrow u_n = u_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$\rightarrow u_n = u_2 + (n - 2) \cdot r \text{ etc...}$$

$$k = n$$

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

■ **Somme de termes consécutifs** :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n-p+1) \times (u_p + u_n)}{2}.$$

▪ $r > 0$	$\{u_n\}$ est croissante
$r < 0$	$\{u_n\}$ est décroissante
$r = 0$	$\{u_n\}$ est constante ou stationnaire

### C Suite géométrique

Dire qu'une suite  $\{u_n\}$  est **géométrique** signifie qu'il existe un nombre  $q$  (**raison**) non nul tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n}$$

→ **Propriétés** : ▪  $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = q^{(n-p)} \times u_p$ .

$$\rightarrow u_n = q^n \times u_0$$

$$\rightarrow u_n = q^{(n-1)} \times u_1$$

$$\rightarrow u_n = q^{(n-2)} \times u_2 \text{ etc...}$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{(n+1)}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

▪ **Somme de termes consécutifs** :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \left( \frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q} \right)$$

▪ **Si le premier terme est strictement positif** :

$q > 1$	$\{u_n\}$ est croissante
$q \in ]0, 1[$	$\{u_n\}$ est décroissante
$q = 1$	$\{u_n\}$ est constante ou stationnaire

■ Si le premier terme est strictement négatif :

$q > 1$	$\{u_n\}$ est décroissante
$q \in ]0, 1[$	$\{u_n\}$ est croissante
$q = 1$	$\{u_n\}$ est constante ou stationnaire

### D Notion de suite convergente, divergente ou nature d'une suite

→  $\{u_n\}$  est **convergente** et converge vers  $L$  (**fini**) ssi :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ .

Notons qu'ici, il y a unicité de  $L$ .

→  $\{u_n\}$  est **divergente** ssi :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

### E Théorème de l'encadrement ou théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang, on a :  $v_n \leq u_n \leq w_n$ , et si les suites  $\{v_n\}$  et  $\{w_n\}$  convergent vers  $L$ , alors la suite  $\{u_n\}$  converge vers  $L$ .

### F Astuces pour le calcul de limites

**F1** La limite en  $+\infty$  d'une suite exprimée sous forme d'un **polynôme** est égale à la limite en  $+\infty$  de son terme de plus haut degré.

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 7n^2 + 3n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 7n^2 \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

**F2** La limite en  $+\infty$  d'une suite exprimée sous forme d'un **rapport de 2 polynômes** est égale à la limite en  $+\infty$  des termes de plus haut degré.

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2}{3n^3 + 33} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2}{3n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{3n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

### F3 Le théorème des croissances comparées (TCC)

En  $+\infty$ , cad quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $e^n$  croît plus vite que  $n^k$  qui croît plus vite que  $\ln(n)$ .

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 + 10}{e^n} = 0, \text{ d'après TCC.}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{49 \cdot \ln(n)}{n} = 0, \text{ d'après TCC.}$$

### F4 La technique de la quantité conjuguée

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - \sqrt{7n^2 + 3} = +\infty - (+\infty).$$

Appliquons la technique de la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} 3n - \sqrt{7n^2 + 3} &= \frac{(3n - \sqrt{7n^2 + 3})(3n + \sqrt{7n^2 + 3})}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})} \\ &= \frac{(3n)^2 - (\sqrt{7n^2 + 3})^2}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})} \\ &= \frac{-4n^2 - 3}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})}, \end{aligned}$$

$$\text{car : } [a - b][a + b] = a^2 - b^2$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - \sqrt{7n^2 + 3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n^2 - 3}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n^2}{(3 + \sqrt{7})n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n}{(3n + \sqrt{7})} \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

### **F5** Les formes indéterminées (FI) souvent rencontrées

- $+\infty - (+\infty)$
- $+\infty \times 0, -\infty \times 0$
- $\frac{0}{0}$

### **F6** Comparaison

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites. Si pour tout entier naturel  $n \geq n_0$  :

- $u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ ,
- $u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

### **G** Sens de variation d'une suite

**G1** ▪  $\{u_n\}$  est dite croissante ssi :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ .

▪  $\{u_n\}$  est dite décroissante ssi :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ .

▪  $\{u_n\}$  est strictement croissante ssi :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$ .

- $\{u_n\}$  est strictement décroissante ssi :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$ .

**G2 Astuces**

- Soit on détermine le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .
- Soit on compare  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  par rapport à 1.
- Soit on pose  $u_n = f(n)$ , avec  $Df \subset [0, +\infty[$ , et on étudie  $f$  sur  $Df$ .

**H Majorée, minorée**

- $\{u_n\}$  est majorée ssi  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n < M, \quad M \text{ étant le majorant.}$$

- $\{u_n\}$  est minorée ssi  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n > m, \quad m \text{ étant le minorant.}$$

**I Théorème des suites monotones**

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.