

ALAIN PILLER

SUITES

Rien de plus facile !

BAC MATHS



TERM.

S

SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

EXOS ANNALES BAC

SAVOIR

A Suite numérique

Une suite numérique est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

→ **Notations** : ■ L'image de $n \in \mathbb{N}$, notée u_n , s'appelle le terme général de la suite.

■ La suite s'écrit : (u_n) ou $\{u_n\}$.

→ **Exemple** : Soit $\{u_n\}$, la suite dont le terme général est : $u_n = \frac{3n^2}{3n^3 + 7n^2}$.

B Suite arithmétique

Dire qu'une suite $\{u_n\}$ est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre r (**raison**) tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r}.$$

→ **Propriétés** : ■ $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n-p) \cdot r$.

$$\rightarrow u_n = u_0 + (n) \cdot r$$

$$\rightarrow u_n = u_1 + (n-1) \cdot r$$

$$\rightarrow u_n = u_2 + (n-2) \cdot r \text{ etc...}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

■ **Somme de termes consécutifs** :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n-p+1) \times (u_p + u_n)}{2}.$$

$r > 0$	$\{u_n\}$ est croissante
$r < 0$	$\{u_n\}$ est décroissante
$r = 0$	$\{u_n\}$ est constante ou stationnaire

C Suite géométrique

Dire qu'une suite $\{u_n\}$ est **géométrique** signifie qu'il existe un nombre q (**raison**) non nul tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n}.$$

→ **Propriétés** : ■ $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = q^{(n-p)} \times u_p$.

$$\rightarrow u_n = q^n \times u_0$$

$$\rightarrow u_n = q^{(n-1)} \times u_1$$

$$\rightarrow u_n = q^{(n-2)} \times u_2 \text{ etc...}$$

$$\blacksquare \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}.$$

■ **Somme de termes consécutifs** :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \left(\frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q} \right).$$

■ **Si le premier terme est strictement positif** :

$q > 1$	$\{u_n\}$ est croissante
$q \in]0, 1[$	$\{u_n\}$ est décroissante
$q = 1$	$\{u_n\}$ est constante ou stationnaire

- Si le premier terme est strictement négatif :

$q > 1$	$\{u_n\}$ est décroissante
$q \in]0, 1[$	$\{u_n\}$ est croissante
$q = 1$	$\{u_n\}$ est constante ou stationnaire

D Notion de suite convergente, divergente ou nature d'une suite

$\rightarrow \{u_n\}$ est **convergente** et converge vers L (**fini**) ssi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Notons qu'ici, il y a unicité de L .

$\rightarrow \{u_n\}$ est **divergente** ssi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

E Théorème de l'encadrement ou théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang, on a : $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si les suites $\{v_n\}$ et $\{w_n\}$ convergent vers L , alors la suite $\{u_n\}$ converge vers L .

F Astuces pour le calcul de limites

F1 La limite en $+\infty$ d'une suite exprimée sous forme d'**un polynôme** est égale à la limite en $+\infty$ de son terme de plus haut degré.

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 7n^2 + 3n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 7n^2 \\ = +\infty.$$

F2 La limite en $+\infty$ d'une suite exprimée sous forme d'**un rapport de 2 polynômes** est égale à la limite en $+\infty$ des termes de plus haut degré.

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2}{3n^3 + 33} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2}{3n^3} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{3n} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

F3 Le théorème des croissances comparées (TCC)

En $+\infty$, cad quand $n \rightarrow +\infty$, e^n croît plus vite que n^k qui croît plus vite que $\ln(n)$.

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 + 10}{e^n} = 0, \text{ d'après TCC.}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{49 \cdot \ln(n)}{n} = 0, \text{ d'après TCC.}$$

F4 La technique de la quantité conjuguée

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - \sqrt{7n^2 + 3} = +\infty - (+\infty).$$

Appliquons la technique de la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}
 3n - \sqrt{7n^2 + 3} &= \frac{(3n - \sqrt{7n^2 + 3})(3n + \sqrt{7n^2 + 3})}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})} \\
 &= \frac{(3n)^2 - (\sqrt{7n^2 + 3})^2}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})} \\
 &= \frac{-4n^2 - 3}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})},
 \end{aligned}$$

$$\text{car : } [a - b][a + b] = a^2 - b^2$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - \sqrt{7n^2 + 3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n^2 - 3}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n^2}{(3 + \sqrt{7})n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n}{(3n + \sqrt{7})} \\
 &= -\infty.
 \end{aligned}$$

F5 Les formes indéterminées (FI) souvent rencontrées

- $+\infty - (+\infty)$
- $+\infty \times 0, -\infty \times 0$
- $\frac{0}{0}$

F6 Comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Si pour tout entier naturel $n \geq n_0$:

- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$,
- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

G1 Sens de variation d'une suite

- $\{u_n\}$ est dite croissantessi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}}$.

- $\{u_n\}$ est dite décroissantessi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}}$.

- $\{u_n\}$ est strictement croissantessi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}}$.

- $\{u_n\}$ est strictement décroissantessi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}}.$

G2 Astuces

- Soit on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Soit on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.
- Soit on pose $u_n = f(n)$, avec $Df \subset [0, +\infty[$, et on étudie f sur Df .

H Majorée, minorée

- $\{u_n\}$ est majoréessi $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} :$

$$\boxed{u_n < M}, M \text{ étant le majorant.}$$

- $\{u_n\}$ est minoréessi $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} :$

$$\boxed{u_n > m}, m \text{ étant le minorant.}$$

I Théorème des suites monotones

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.