

ALAIN PILLER

PROBAS DISCRÈTES

Rien de plus facile !

BAC MATHS



TERM.

S

SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

EXOS ANNALES BAC

SAVOIR

A Quelques définitions :

1 Définissons ce qu'est une expérience aléatoire :

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine.

2 Déterminons ce qu'est l'univers ou ensemble des possibilités ou ensemble fondamental :

L'univers ou ensemble des possibilités ou ensemble fondamental est l'ensemble de tous les résultats ou de toutes les réalisations possibles d'une expérience aléatoire.

L'univers se note Ω .

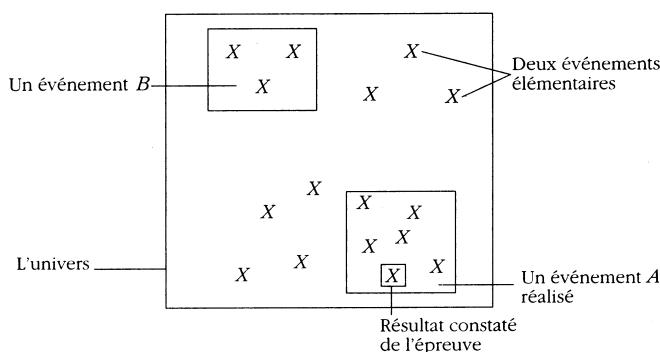
3 Donnons la définition d'un événement élémentaire et celle d'un événement aléatoire :

Un événement élémentaire est une réalisation possible de Ω .

Par ailleurs, toute partie A de Ω constituée d'événements élémentaires est appelé **un événement aléatoire ou événement**.

4 Essayons de résumer ces différentes notions à l'aide d'un graphique :

Ces différentes notions peuvent être résumées à l'aide du graphique suivant :



5 Donnons la signification de \bar{A} :

\bar{A} est le complémentaire de A dans Ω .

Ainsi, si l'événement A est réalisé, alors l'événement \bar{A} n'est pas réalisé.

6 Donnons la signification de $A \cup B$:

Soit l'événement $X = A \cup B$ (A union B).

La réalisation de l'événement X entraîne la réalisation de l'événement A ou de l'événement B , ou des deux événements A et B simultanément.

7 Donnons la signification de $A \cap B$:

L'intersection des deux événements A et B se note $A \cap B$.

Soit l'événement $Y = A \cap B$ (A inter B).

La réalisation de l'événement Y entraîne la réalisation de l'événement A et de l'événement B .

8 Donnons la signification de $A \subset B$:

La relation $A \subset B$ (A inclus dans B) exprime le fait que la réalisation de l'événement A implique celle de B .

9 a). Donnons la signification de $A \cap B = \emptyset$:

La relation $A \cap B = \emptyset$ exprime le fait que les événements **A et B sont incompatibles** cad qu'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.

Il est bon de noter que \emptyset (l'ensemble vide) est appelé l'événement impossible car il n'est jamais réalisé.

À l'inverse, Ω est appelé l'événement certain car il est toujours réalisé.

[B] Quelques propriétés des événements :**▪ La commutativité :**

$$A \cup B = B \cup A ;$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

▪ **L'associativité :**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C ;$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

▪ **La distributivité :**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) ;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

▪ **Autres propriétés :**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} ;$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} ;$$

$$\overline{\bar{A}} = A ;$$

$$\overline{A} \cap \emptyset = \emptyset ;$$

$$\overline{A} \cup \emptyset = A ;$$

$$\overline{A} \cap \Omega = A ;$$

$$\overline{A} \cup \Omega = \Omega ;$$

$$\overline{A} \cap \bar{A} = \emptyset ;$$

$$\overline{A} \cup \bar{A} = \Omega .$$

▪ **Incompatibilité de 2 événements :**

A et B sont **incompatibles** ssi : $A \cap B = \emptyset$.

C **Quelques propriétés des probabilités :**

▪ La probabilité d'un événement est toujours positive ou nulle : $\forall A, P(A) \geq 0$.

▪ $P(\Omega) = 1$.

▪ $P(\emptyset) = 0$.

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Si l'événement A est constitué de 3 événements élémentaires a, b et c , dont les probabilités respectives sont $P(a), P(b)$ et $P(c)$, alors : $P(A) = P(a) + P(b) + P(c)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

D Indépendance de 2 événements :

1 Définition :

Deux événements A et B sont indépendantsssi : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

2 Remarque :

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité de 2 événements A et B .

- **A et B indépendantsssi** : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- **A et B incompatiblessi** : $P(A \cap B) = 0$ car $A \cap B = \emptyset$.

3 Démonstration à connaître :

Soient A et B , 2 événements.

A et B indépendants $\Leftrightarrow \bar{A}$ et B indépendants.

Supposons : A et B indépendants.

Dans ces conditions : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ (1).

(1) $\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ (2).

Comme A et B indépendants : (2) $\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$ (3).

(3) $\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B)(1 - P(A)) \Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times P(\bar{A})$.

Donc on a bien : $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$, ce qui nous permet d'affirmer que \bar{A} et B sont bien indépendants.

E Probabilités conditionnelles :

1 Définition :

Soient A et B , deux événements, avec $P(B) > 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B , le nombre réel :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

2 Autre notation :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

3 Remarque :

Si A et B sont indépendants alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P_B(A) = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} \Rightarrow P_B(A) = P(A).$$

F Loi de probabilités :

1 Exemples : *Voir exercices Training 4.*

2 Espérance mathématique :

(a). Formule :

$$E(X) = \sum_1^n x_i P(X = x_i).$$

(b). Propriétés :

Soient X et Y deux variables aléatoires et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$.

3 Variance :

(a). Formule :

$$V(X) = \sum_1^n x_i^2 \cdot P(X = x_i) - [E(X)]^2.$$

(b). Propriété :

Soit X une variable aléatoire et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

G Bernoulli et loi binomiale :

1 Epreuve de Bernoulli :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que **deux issues** :

- « succès » avec une probabilité p .
- « échec » avec une probabilité $(1-p)$.

2 Schéma de Bernoulli :

Un schéma de Bernoulli est une succession d'épreuves de **Bernoulli, identiques et indépendantes** les unes des autres.

Notons que les tirages se font avec remise.

3 La loi binomiale :

La loi binomiale découle d'un schéma de Bernoulli. Dans ces conditions, la probabilité d'obtenir « κ » succès sur « n » épreuves indépendantes (ou avec remise) est :

$$P(X = \kappa) = \binom{n}{\kappa} p^\kappa (1-p)^{n-\kappa}.$$

Notons que : $\binom{n}{\kappa} = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$,

- les n épreuves sont **indépendantes**, elles comportent chacune **deux issues** (succès, échec) et sont **identiques**.
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

4 ⊕ sur la loi binomiale :

(a). Notation :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres :

$n = 30$ et $p = 0,4$.

On note : $X \sim B(n ; p)$, cad $X \sim B(30 ; 0,4)$.

(b). Espérance et variance :

Soit $X \sim B(n ; p)$: $E(X) = n \cdot p$ et $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$.