2

ALAIN PILLER

PROBAS DISCRÈTES

Rien de plus facile !

BAC MATHS

TERM.
ES,L

SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

EXOS ANNALES BAC

PREMIUM ÉDITEUR

SAVOIR

A Quelques définitions :

1 Définissons ce qu'est une expérience aléatoire :

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine.

2 Déterminons ce qu'est l'univers ou ensemble des possibilités ou ensemble fondamental :

L'univers ou ensemble des possibilités ou ensemble fondamental est l'ensemble de tous les résultats ou de toutes les réalisations possibles d'une expérience aléatoire.

L'univers se note Ω .

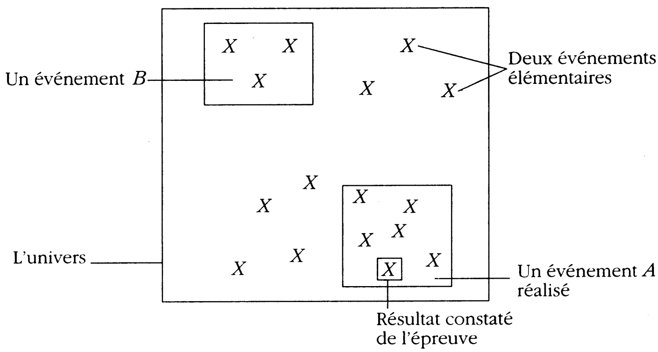
3 Donnons la définition d'un événement élémentaire et celle d'un événement aléatoire :

Un événement élémentaire est une réalisation possible de Ω .

Par ailleurs, toute partie A de Ω constituée d'événements élémentaires est appelé **un événement aléatoire ou événement**.

4 Essayons de résumer ces différentes notions à l'aide d'un graphique :

Ces différentes notions peuvent être résumées à l'aide du graphique suivant :



5 Donnons la signification de $\bar{A}$:

$\bar{A}$ est le complémentaire de A dans Ω.

Ainsi, si l'événement A est réalisé, alors l'événement $\bar{A}$ n'est pas réalisé.

6 Donnons la signification de $A \cup B$:

Soit l'événement $X = A \cup B$ (A union B).

La réalisation de l'événement X entraîne la réalisation de l'événement A ou de l'événement B, ou des deux événements A et B simultanément.

7 Donnons la signification de $A \cap B$:

L'intersection des deux événements A et B se note $A \cap B$.

Soit l' événement $Y = A \cap B$ (A inter B).

La réalisation de l'événement Y entraîne la réalisation de l'événement A et de l'événement B.

8 Donnons la signification de $A \subset B$:

La relation $A \subset B$ (A inclus dans B) exprime le fait que la réalisation de l'événement A implique celle de B.

9 a. Donnons la signification de $A \cap B = \varnothing$:

La relation $A \cap B = \varnothing$ exprime le fait que les événements **A et B sont incompatibles** cad qu'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.

Il est bon de noter que $\varnothing$ (l'ensemble vide) est appelé l'événement impossible car il n'est jamais réalisé.

À l'inverse, Ω est appelé l'événement certain car il est toujours réalisé.

B Quelques propriétés des événements :

- **La commutativité** :

$A \cup B = B \cup A$;

$A \cap B = B \cap A$.

- **L'associativité** :

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.

- **La distributivité** :

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- **Autres propriétés** :

– $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

– $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

– $\bar{\bar{A}} = A$;

– $A \cap \varnothing = \varnothing$;

– $A \cup \varnothing = A$;

– $A \cap \Omega = A$;

– $A \cup \Omega = \Omega$;

– $A \cap \bar{A} = \varnothing$;

– $A \cup \bar{A} = \Omega$.

- **Incompatibilité de 2 événements** :

A et B sont **incompatibles** ssi : $\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$.

C Quelques propriétés des probabilités :

- La probabilité d'un événement est toujours positive ou nulle : $\forall A, P(A) \geq 0$.
- $P(\Omega) = 1$.
- $P(\varnothing) = 0$.

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- Si l'événement A est constitué de 3 événements élémentaires a, b et c, dont les probabilités respectives sont $P(a), P(b)$ et $P(c)$, alors : $P(A) = P(a) + P(b) + P(c)$.

- $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

D Indépendance de 2 événements :

1 Définition :

Deux événements A et B sont indépendants ssi : $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.

2 Remarque :

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité de 2 événements A et B.

- **A et B indépendants ssi** : $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$.

- **A et B incompatible ssi** : $\boldsymbol{P(A \cap B) = 0}$ **car** $\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$.

3 Démonstration à connaître :

Soient A et B, 2 événements.

A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ et B indépendants.

Supposons : A et B indépendants.

Dans ces conditions : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ (1).

(1) $\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ (2).

Comme A et B indépendants : (2) $\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$ (3).

(3) $\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B)(1 - P(A)) \Rightarrow \boldsymbol{P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times P(\bar{A})}$.

Donc on a bien : $\boldsymbol{P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)}$, ce qui nous permet d'affirmer que $\bar{A}$ et B sont bien indépendants.

E Probabilités conditionnelles :

1 Définition :

Soient A et B, deux événements, avec $P(B) > 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, le nombre réel :

$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}.$$

2 Autre notation :

$$\boldsymbol{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}.$$

3 Remarque :

Si A et B sont indépendants alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P_B(A) = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} \Rightarrow \boldsymbol{P_B(A) = P(A)}.$$

F Loi de probabilités :

1 Exemples : *Voir exercices Training 4*.

2 Espérance mathématique :

a. Formule :

$$E(X) = \sum_{1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

b. Propriétés :

Soient X et Y deux variables aléatoires et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$.

3 Variance :

ⓐ. Formule :

$$V(X) = \sum_{1}^{n} x_i^2 \cdot P(X = x_i) - [E(X)]^2 .$$

ⓑ. Propriété :

Soit X une variable aléatoire et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$V(aX + b) = a^2 V(X) .$$

G Bernoulli et loi binomiale :

1 Epreuve de Bernoulli :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que **deux issues** :

- « **succés** » avec une probabilité $\boldsymbol{p}$.
- « **échec** » avec une probabilité $(\mathbf{1} - \boldsymbol{p})$.

2 Schéma de Bernoulli :

Un schéma de Bernoulli est une succession d'épreuves de **Bernoulli**, **identiques** et **indépendantes** les unes des autres.

Notons que les tirages se font avec remise.

3 La loi binomiale :

La loi binomiale découle d'un schéma de Bernoulli. Dans ces conditions, la probabilité d'obtenir «$\boldsymbol{\kappa}$» **succés** sur «$\boldsymbol{n}$» **épreuves** indépendantes (ou avec remise) est :

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = \kappa) = \binom{n}{\kappa} p^{\kappa}(1 - p)^{n - \kappa}}}.$$

Notons que : ▪ $\binom{n}{\kappa} = \dfrac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$,

▪ les n épreuves sont **indépendantes**, elles comportent chacune **deux issues** (succés, échec) et sont **identiques**.

▪ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

▪ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

4 ⊕ sur la loi binomiale :

ⓐ. **Notation** :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres :

$n = 30$ et $p = 0,4$.

On note : $\boldsymbol{X \rightsquigarrow B(n\ ;\ p)}$, cad $\boldsymbol{X \rightsquigarrow B(30\ ;\ 0,4)}$.

ⓑ. **Espérance et variance** :

Soit $X \rightsquigarrow B(n\ ;\ p)$: $\boxed{\boldsymbol{E(X) = n\,.\,p}}$ et $\boxed{\boldsymbol{V(X) = n\,.\,p.(1-p)}}$.